BICENTENARIO DE BOLIVIA

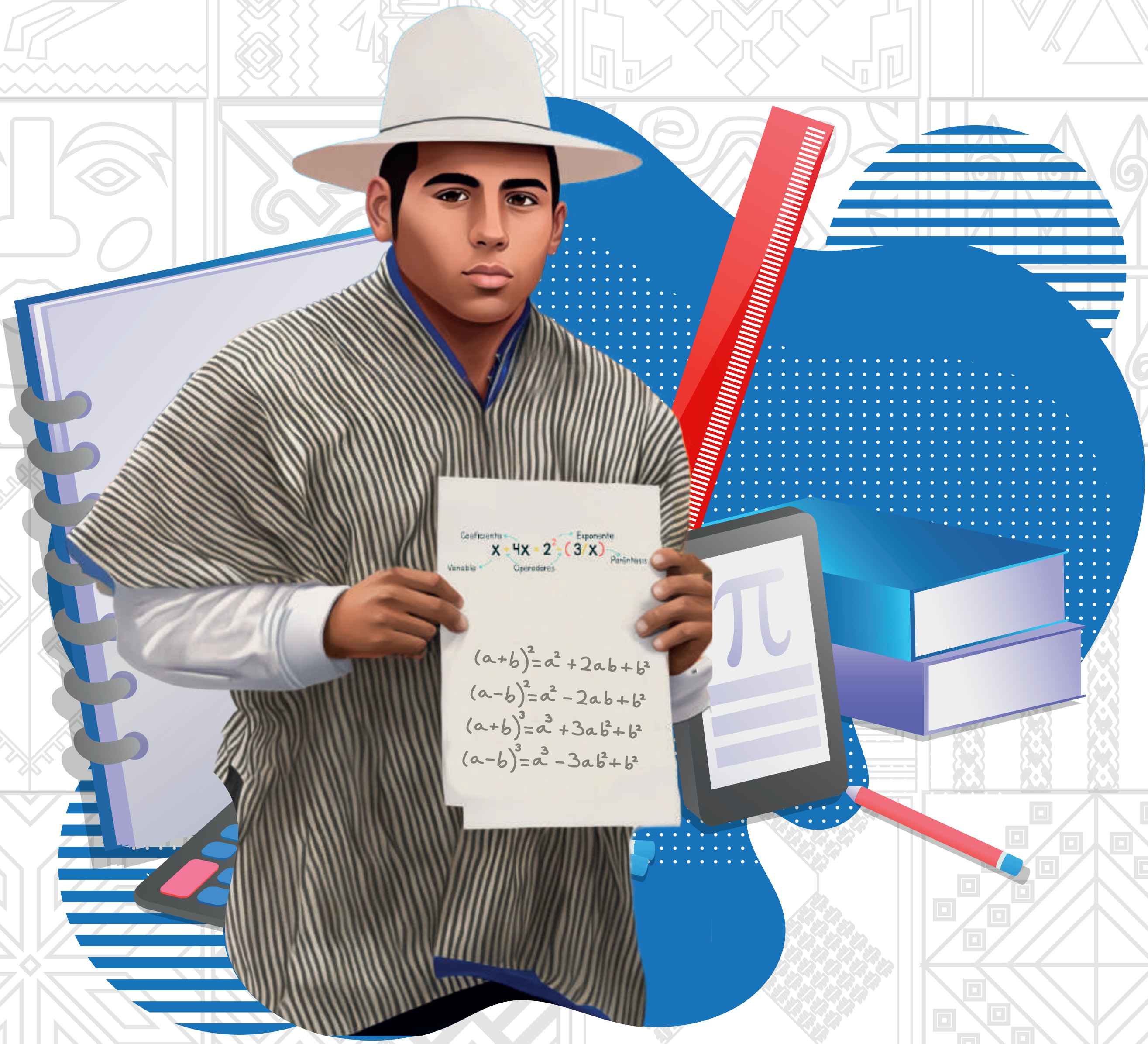
ESTADO PLURINACIONAL DE BOLIVIA

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

MATEMÁTICA

APRENDIZAJES APLICADOS

EDUCACIÓN SECUNDARIA DE PERSONAS JÓVENES Y ADULTAS



GUÍA DE TRABAJO

VICEMINISTERIO DE EDUCACIÓN ALTERNATIVA Y ESPECIAL
DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN ALTERNATIVA

MINISTERIO DE EDUCACIÓN
GUÍA DE TRABAJO APRENDIZAJES APLICADOS - MATEMÁTICA
EDUCACIÓN DE PERSONAS JÓVENES Y ADULTAS

Edgar Pary Chambi
MINISTRO DE EDUCACIÓN

Viviana Mamani Laura
VICEMINISTRA DE EDUCACIÓN ALTERNATIVA Y ESPECIAL

Ximena Aguirre Calamani
DIRECTORA GENERAL DE EDUCACIÓN ALTERNATIVA

EDICIÓN, DISEÑO E ILUSTRACIÓN:
Viceministerio de Educación Alternativa y Especial
Dirección General de Educación Alternativa

Cómo citar este documento:
Ministerio de Educación. “Matemática - Guía de trabajo, Aprendizajes aplicados”. La Paz, Bolivia.

Depósito legal:
4 - 1 - 349 - 2023 P.O.

Impresión:
EDITORIAL DEL ESTADO PLURINACIONAL DE BOLIVIA

LA VENTA DE ESTE DOCUMENTO ESTÁ PROHIBIDA

Av. Arce, Nro. 2147
www.minedu.gob.bo

Índice

	1
Orientaciones para uso de la guía de trabajo	3
Módulo 1: **Ecuaciones y su relación con las actividades de trabajo**	4
Objetivo holístico del módulo	4
Unidad temática N.° 1: **Sistema productivo de las familias y comunidades**	4
Representación de números racionales	5
Operaciones con números racionales	6
Unidad temática N.° 2: **Potenciación y radicación**	15
Propiedades de la potenciación	17
Signos de la potenciación	17
Radicación	20
Unidad temática N.° 3: **Razones y proporciones en el manejo de los recursos naturales**	24
Razón de cantidades homogéneas	25
Proporciones	25
Propiedades	26
Magnitudes directamente e inversamente proporcionales	27
Regla de tres simple en la vida familiar	27
Porcentajes	28
Resolución y cálculo del interés simple en el manejo de los recursos naturales	29
Estadística aplicada	30
Problemas comunitarios que usan razones y proporciones en procesos productivos	32
Módulo 2: **Expresiones algebraicas en la vida social y económica**	35
Objetivo holístico del módulo	35
Unidad temática N.° 1: **Expresiones algebraicas en la vida familiar y comunal**	35
Polinomios	38
Grados y orden de un polinomio	39

Unidad temática N.° 2: Operaciones algebraicas 44
Operaciones con polinomios 45
Productos notables 51
Teorema del Binomio de Newton 54
Cocientes notables 55
Unidad temática N.° 3: Potenciación y radicación 58
¿Qué es potenciación? 58
Operaciones con exponentes y radicación 62
Resolución de problemas 64
Unidad temática N.° 4: Factorización de Polinomios 67
Casos para factorizar expresiones algebraicas 67
Resolución de problemas 76
Unidad temática N.° 5: Fracciones algebraicas 80
Simplificación de fracciones algebraicas 80
Máximo Común Divisor (M.C.D) 83
Mínimo Común Múltiplo (mcm) 86
Operaciones con fracciones algebraicas 87
Bibliografía 94

Presentación

Con el objetivo de garantizar una educación de calidad en los procesos de aprendizaje, el Ministerio de Educación del Estado Plurinacional de Bolivia, a través del Viceministerio de Educación Alternativa y Especial y la Dirección General de Educación de Alternativa, proporciona valiosos recursos educativos destinados a la formación de Personas Jóvenes y Adultas en el presente periodo.

Es fundamental tener en cuenta que las Personas Jóvenes y Adultas desempeñan un papel activo en los cambios sociales. Por este motivo, la Educación Alternativa les brinda oportunidades de formación y capacitación que les permiten acceder al conocimiento en diversos campos de saberes. Esto implica una formación permanente, continua y equitativa, enmarcada en el concepto filosófico del Vivir Bien.

Los materiales educativos que se presentan en este contexto tienen un enfoque inclusivo y están diseñados para atender la diversidad de características de los estudiantes/participantes. Han sido elaborados siguiendo las orientaciones del currículo, con el propósito de lograr una formación integral que abarque las dimensiones del ser, saber, hacer y decidir. Además, se consideran los objetivos holísticos, los momentos metodológicos y la evaluación, teniendo en cuenta los diferentes contextos y modalidades de atención del Sistema Educativo Plurinacional. Todo esto se encuentra en línea con el Modelo Educativo Sociocomunitario Productivo establecido en la Ley de Educación N° 070 “Avelino Siñani – Elizardo Pérez”.

Es importante resaltar que esta guía de trabajo no sigue el formato tradicional de un texto de aprendizaje, sino que tiene un enfoque orientador. Su propósito es promover el autoaprendizaje y la autonomía de los participantes. Asimismo, plantea procesos educativos flexibles que se adaptan a la diversidad cultural y a las múltiples ocupaciones de los participantes. Utiliza una variedad de recursos educativos como videos, textos de apoyo, entre otros, con el fin de fortalecer el aprendizaje de los participantes.

Estimados estudiantes/participantes y comunidad en general, los invitamos a formar parte de la Educación Alternativa y a continuar con una formación integral, tanto humanística como técnica. Esto nos permitirá avanzar juntos por una educación de calidad rumbo al Bicentenario.

Edgar Pary Chambi
Ministro de Educación

Orientaciones para uso de la guía de trabajo

Para aprovechar al máximo esta guía y lograr el desarrollo de las actividades propuestas, utilizamos la siguiente iconografía que indica el inicio de los momentos metodológicos y las actividades correspondientes.

Objetivo holístico: orienta el proceso formativo articulado a las dimensiones Ser, Saber, Hacer y Decidir.

Práctica: indagamos conocimientos previos a partir de nuestra experiencia y realidad antes de abordar los contenidos.

Teoría: manejamos y comprendemos conceptos y categorías, que posibiliten profundizar el debate que te propone cada Unidad Temática.

Valoración: nos apropiamos de criterios que nos permitan profundizar en nuestra reflexión y análisis de la realidad a partir de los contenidos.

Producción: promovemos la aplicación creativa del conocimiento, donde los participantes compartirán los resultados de su proceso formativo.

Actividades: desarrollamos actividades que incluyan consignas concretas y precisas que faciliten la internalización de los conocimientos adquiridos.

Escanear código QR: nos invita a explorar temáticas complementarias a los contenidos desarrollados. Al escanearlo, podremos acceder a una variedad de recursos audiovisuales.

Módulo 1

Números racionales en la vida familiar y comunitaria

Objetivo holístico del módulo

Fortalecemos las habilidades, capacidades y conocimientos mediante la aplicación y resolución de los números racionales en la vida familiar, comunitaria y su importancia en el trabajo diario que permita desarrollar el razonamiento lógico matemático y su aplicación en los emprendimientos comunitarios.

Unidad temática N.º 1

Sistema productivo de las familias y comunidades

Partamos de nuestra experiencia

Comenzaremos este tema explorando detalladamente los números que nos permiten cuantificar las distintas magnitudes de los elementos que conforman nuestro entorno.

Actividad

- Para empezar, visitaremos la feria o el mercado de nuestra zona para percibir el uso de los diferentes números.
- Describiremos estos números en forma escrita y simbólica según lo indica el siguiente cuadro.

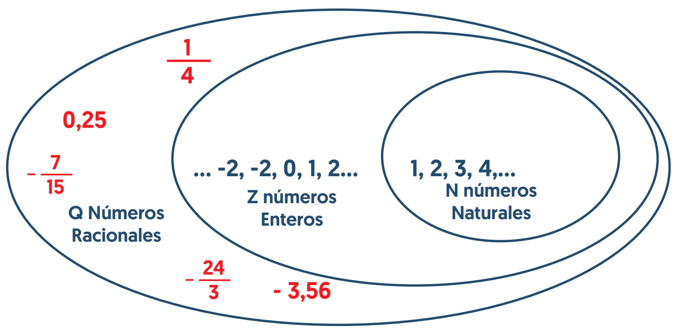
ACTIVIDAD	DE FORMA LITERAL	DE FORMA SIMBÓLICA
Compra de dos gaseosas	Medio litro Dos litros	$\frac{1}{2}$ litro 2 litros
....	....	....

Profundicemos nuestros saberes y conocimientos

Representación de números racionales

"Los números racionales también son aquellos números que se pueden representar como una división o como una fracción".

$\frac{a}{b}$ Donde **b ≠ 0** diferente de cero, a y b son números enteros



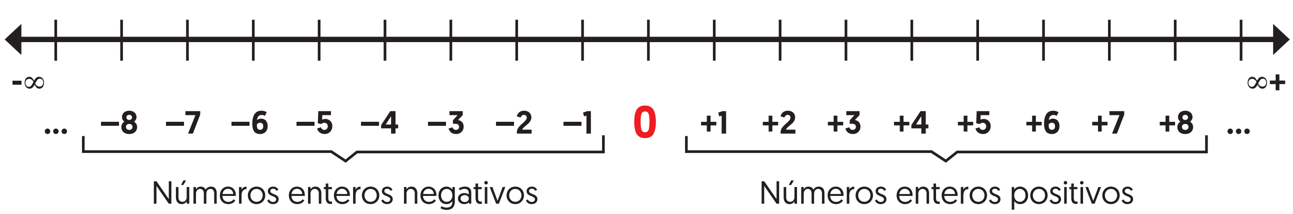
Números naturales **N = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,......., ∞+}**

Números enteros **Z = {– ∞......– 4, – 3, – 2, – 1, 0, 1, 2, 3,......,∞+}**

Números racionales **Q = {– ∞........ -1 ,-0,2, - $\frac{1}{9}$, 0, $\frac{1}{10}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2, 3, ..., ∞+}**

- Números enteros

  En la recta numérica se identifican a los números enteros negativos con el signo negativo **(-)** y los números enteros positivos con el signo **(+)**, que están separados por el cero **(0)** .



Como se puede observar los números naturales N y los números enteros Z son subconjuntos de los números racionales Q, por tanto, pueden ser representados como números racionales

6 es racional porque se puede representar como: $\frac{6}{1}$

–3 es racional porque se puede representar como: $-\frac{1}{3}$

En una fracción donde

$$\frac{1}{9}$$

1 → numerador, que indica la unidad a fraccionar

9 → denominador, que indica el número de partes que se divide la unidad.

Operaciones con números racionales

Adición, sustracción con números racionales

Con signos iguales: Se suman los números y se repite el signo

a) $+5+6=+11$

cuando llevan el signo positivo no es necesario copiar en el resultado solo es 11

b) $-7-5=-12$

c) $+\frac{6}{3}+\frac{4}{3}=\frac{+6+4}{3}=+\frac{+10}{3}=\frac{10}{3}$

(si los denominadores son iguales son fracciones homogéneas)

d) $-\frac{3}{2}-\frac{8}{2}=\frac{-9-16}{6}=-\frac{25}{6}$

(si los denominadores son diferentes son fracciones heterogéneas)

Con signos opuestos: Se restan los números y **copiar el signo del número mayor**

a) $+5-12=-7$

b) $-4+16=+12$

c) $-18+8=-10$

d) $+9-5=+4$

e) $+\frac{4}{5}-\frac{7}{3}=\frac{+12-35}{15}=-\frac{23}{15}$

(si el numerador es mayor que el denominador son fracciones impropias)

f) $+\frac{11}{4}-\frac{6}{8}=\frac{+88-24}{32}=+\frac{64}{32}$

(fracción impropia)

g) $-\frac{9}{6}+\frac{5}{2}=\frac{-18+30}{12}=+\frac{12}{12}=1$

(si el numerador y denominador son iguales la fracción es aparente)

h) $-\frac{10}{7}+\frac{6}{3}=\frac{-30+42}{21}=+\frac{12}{21}$

(si el numerador es menor al denominador son fracciones propias)

Aprendamos juntos a resolver problemas de suma y resta

Ejemplos:

a) $$\underbrace{+7-2}_{+5}\;\underbrace{+2-9}_{-7}\;\underbrace{+5+2}_{+7} = +5$$

$$\underbrace{\underbrace{+5 \quad -7}_{-2} \quad +7}_{+5}$$

b) $$-\frac{10}{2}+\frac{8}{1}+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{41}{12}$$

$$\underbrace{-\frac{10}{2}+\frac{8}{1}}_{\frac{-10+16}{2}} \quad \underbrace{+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}_{\frac{+9-4}{12}}$$

$$\underbrace{\frac{-10+16}{2}}_{+\frac{6}{2}} \qquad \underbrace{\frac{+9-4}{12}}_{+\frac{5}{12}}$$

$$\underbrace{+\frac{6}{2} \qquad +\frac{5}{12}}_{\frac{+72+10}{24}}$$

$$\frac{\cancel{82}^{\,41}}{\cancel{24}_{\,12}}=\frac{41}{12}$$

$$-\frac{10}{2}+\frac{8}{1}=\frac{-10\bullet 1+2\bullet 8}{2\bullet 1}=\frac{-10+16}{2}=+\frac{6}{2}$$

$$+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{+3\bullet 3-4\bullet 1}{4\bullet 3}=\frac{+9-4}{12}=+\frac{5}{12}$$

$$+\frac{6}{2}+\frac{5}{12}=\frac{+6\bullet 12+2\bullet 5}{2\bullet 12}=\frac{+72+10}{24}=+\frac{82}{24}$$

ACTIVIDAD. En el cuaderno de prácticas resolvemos los siguientes problemas:

a) $+4-9+8-1=$

b) $-\frac{1}{5}+\frac{8}{5}+\frac{3}{5}-\frac{4}{5}=$

c) $-\frac{4}{2}+\frac{5}{3}-\frac{6}{4}+\frac{5}{1}=$

d) $-8+3-5-3+1=$

e) $+\frac{3}{2}-\frac{6}{2}+\frac{7}{2}-\frac{9}{2}=$

f) $-\frac{2}{3}-\frac{6}{3}+\frac{5}{3}+\frac{12}{3}=$

g) $-8+3-5-2+1-9=$

h) $+\frac{1}{4}+\frac{6}{2}+\frac{2}{1}-\frac{5}{3}=$

i) $-\frac{6}{3}+\frac{5}{4}+\frac{2}{5}-\frac{5}{6}=$

Aprendamos juntos a resolver problemas de multiplicación

Para resolver la multiplicación es necesario conocer la ley de los signos.

a) $(+3)\bullet(+6)=+18$

b) $(-4)\bullet(-2)=+8$

c) $(-7)\bullet(+5)=-35$

d) $(+6)\bullet(-8)=-48$

LEY DE SIGNOS
+ POR + = +
– POR – = +
– POR + = –
+ POR – = –

e) $\left(+\frac{3}{2}\right)\bullet\left(+\frac{8}{3}\right)=\frac{(+3)\bullet(+8)}{2\bullet 3}=+\frac{\overset{\cancel{4}}{\overset{\cancel{12}}{24}}}{\underset{\cancel{1}}{\underset{\cancel{3}}{6}}}=+\frac{4}{1}=4$

f) $\left(-\frac{5}{6}\right)\bullet\left(-\frac{9}{2}\right)=\frac{(-5)\bullet(-9)}{6\bullet 2}=+\frac{\overset{\cancel{15}}{45}}{\underset{\cancel{4}}{12}}=+\frac{15}{4}=\frac{15}{4}$

g) $\left(-\frac{3}{4}\right)\bullet\left(+\frac{6}{5}\right)=\frac{(-3)\bullet(-6)}{4\bullet 5}=-\frac{\overset{9}{\cancel{18}}}{\underset{10}{\cancel{20}}}=+\frac{9}{10}$

h) $\left(+\frac{6}{2}\right)\bullet\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{(+6)\bullet(-1)}{2\bullet 4}=-\frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{4}{\cancel{8}}}=-\frac{3}{4}$

ACTIVIDAD. En el cuaderno de prácticas resolvemos los siguientes problemas:

a) $(+2)\bullet(-6)\bullet(-8)=$

b) $(+7)\bullet(-6)\bullet(+3)=$

c) $(-6)\bullet(-5)\bullet(-6)\bullet(-5)=$

d) $\left(-\frac{7}{2}\right)\bullet\left(+\frac{5}{8}\right)=$

e) $\left(-\frac{4}{3}\right)\bullet\left(-\frac{8}{6}\right)=$

f) $\left(-\frac{3}{5}\right)\bullet\left(+\frac{6}{6}\right)\bullet\left(+\frac{9}{1}\right)\bullet\left(-\frac{1}{3}\right)=$

g) $\left(+\frac{1}{2}\right)\bullet\left(-\frac{8}{1}\right)\bullet\left(-\frac{3}{4}\right)=$

h) $\left(-\frac{4}{6}\right)\bullet\left(+\frac{3}{4}\right)\bullet\left(-\frac{5}{2}\right)=$

i) $\left(+\frac{8}{3}\right)\bullet\left(+\frac{4}{6}\right)=$

ACTIVIDAD. En el cuaderno de prácticas resolvamos los siguientes problemas:

- División con números racionales

Se tiene que tomar en cuenta lo siguiente:

$(+) \div (+) = (+)$

$(-) \div (-) = (+)$

$(+) \div (-) = (-)$

$(-) \div (+) = (-)$

O también

$\dfrac{(+)}{(+)} = (+)$ $\dfrac{(+)}{(-)} = (-)$

$\dfrac{(-)}{(+)} = (-)$ $\dfrac{(-)}{(-)} = (+)$

Aprendamos juntos a resolver problemas de división

Ejemplos:

a) $(+\,63) \div (+\,3) = +\,21$

b) $(-\,4) \div (-\,2) = +\,2$

c) $(-\,75) \div (+\,5) = -\,15$

d) $(+\,16) \div (-\,8) = -\,2$

Para las fracciones se podrá dar la solución de varias maneras según se presente la operación.

Se multiplica en forma cruzada de derecha a izquierda.

$$\frac{5}{6} \div \frac{1}{3} = \frac{5 \bullet 3}{6 \bullet 1} = \frac{15}{6}$$

Se invierte la fracción de la derecha y se multiplica.

$$\frac{5}{6} \div \frac{1}{3} = \frac{5 \bullet 3}{6 \bullet 1} = \frac{15}{6}$$

También se multiplican los medios con medios y extremos con extremos.

$$\frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{15}{6}$$

ACTIVIDAD. En el cuaderno de prácticas resolvemos los siguientes problemas:

a) $\left(-\frac{5}{6}\right) \div \left(+\frac{1}{3}\right) =$

c) $\left(-\frac{3}{8}\right) \div \left(-\frac{36}{7}\right) =$

c) $\left(+\frac{5}{2}\right) \div \left(-\frac{6}{8}\right) =$

b) $\dfrac{-\frac{5}{8}}{+\frac{8}{4}} =$

d) $\dfrac{\left(-\frac{5}{2}\right) \bullet \left(+\frac{1}{4}\right)}{\left(+\frac{7}{5}\right) \bullet \left(-\frac{2}{3}\right)} =$

d) $\dfrac{\left(+\frac{1}{5}\right) \bullet \left(+\frac{7}{3}\right)}{\left(-\frac{2}{8}\right) \bullet \left(-\frac{3}{6}\right)} =$

a) Fracciones mixtas

Se forma a partir de una suma de un número entero más una fracción.

$6 + \frac{1}{2} = 6\,\frac{1}{2}$ Se puede convertir a una fracción simple. $6 + \frac{1}{2} = \frac{(6 \bullet 2) + 1}{2} = \frac{12 + 1}{2} = \frac{13}{2}$

$-5 - \frac{3}{7} = -5\,\frac{3}{7}$ Se puede convertir a una fracción simple $-\left(5\frac{3}{7}\right) = -\frac{(5 \bullet 7) + 3}{7} = \frac{35 + 3}{7} = \frac{38}{3}$

b) Números decimales

Si dividimos la fracción $\frac{13}{2} = 6{,}5$

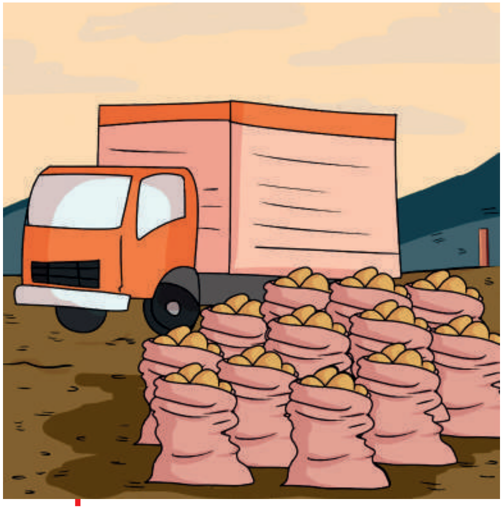
Si dividimos la fracción $\frac{67}{3} = 22{,}3333333\ ...$

Valoramos nuestros conocimientos adquiridos

Ejemplo: 1

Pedro ha cosechado 30 cargas de papa y traslada a la feria para realizar la venta, habrá que entender que la cosecha nos es homogénea y se tiene 10 cargas de primera que se vende a 800 Bs. cada carga, 15 cargas de segunda que se vende a 750 Bs. y 5 cargas que es la tercera que se vende a 500 Bs. la carga, se tiene que pagar el traslado que llega a costar a 10 Bs. por cada carga el descargue se realiza en el puesto de venta que lo hacen dos peones que se les paga por carga a 15 Bs. a cada uno.

¿Cuál es el monto total de capital que se tiene después de vender y pagar los servicios de traslado descargue y otros gastos adicionales que llegan a 100 Bs.?



DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN ALTERNATIVA

Todo ingreso como venta de cualquier producto siempre será positivo.

Detalle	Cantidad	Costo unitario Bs. por carga	Costo total Bs.
Carga de papa primera	10	800	8.000
Carga de papa segunda	15	750	11.250
Carga de papa tercera	5	500	2.500
TOTAL, INGRESOS			**21.750**

Todo egreso de cualquier tipo será negativo.

Detalle	Cantidad/ carga	Costo unitario Bs. por carga	Costo total Bs.
Traslado de la carga de papa	30	10	–300
Descargue primer peón	20	15	–300
Descargue segundo peón	10	15	–150
Otros gatos			–100
TOTAL, EGRESOS			–850

El saldo total será 21.750 - 850 = 20.900 Bs.

El capital total será de 20.900 Bs.

Ejemplo: 2

María y su esposo José van al mercado a hacer compras. Se disponen a comprar media arroba de papa a un costo de 15 Bs., una cuartilla de arroba de zanahoria a un costo de 10 Bs., dos cuartillas de arroba de maíz pelado a un costo de 20 Bs., una arroba de harina a un costo de 25 Bs., media cuartilla de tomate por 4 Bs. y finalmente, dos arrobas y media de arroz a un costo de 85 Bs.

María y José desean conocer: ¿cuánto de producto se llevan? Y ¿cuál es el costo total a pagar?

Detalle	Cantidad/ arrobas (@)	Costo total Bs.
Papa	$\frac{1}{2}$	15
Zanahoria	$\frac{1}{4}$	10
Maíz pelado	$\frac{2}{4}$	20
Harina	1	25
Tomate	$\frac{1}{8}$	4
Arroz	$2\frac{1}{2}$	85
TOTAL, A PAGAR		**159**

Para conocer la cantidad de producto se debe sumar los productos.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+1+\frac{1}{8}+2\frac{1}{2}=$$

Antes de resolver convertimos la fracción mixta.

$$2\frac{1}{2}=\frac{(2\bullet 2)+1}{2}=\frac{4+1}{2}=\frac{5}{2}$$

Entonces reemplazamos y resolvemos

$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{2}{4}+\frac{1}{1}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{5}{2}}=$$

$$\underbrace{\frac{4+2}{8}}+\underbrace{\frac{2+4}{4}}+\underbrace{\frac{2+40}{16}}$$

$$\frac{\overset{1}{\cancel{\overset{3}{\cancel{6}}}}}{\underset{2}{\cancel{\underset{4}{\cancel{8}}}}}+\frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{2}{\cancel{4}}}+\frac{\overset{21}{\cancel{42}}}{\underset{8}{\cancel{16}}}=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\frac{21}{8}=\frac{6}{2}+\frac{21}{8}=\frac{16+42}{16}=\frac{\overset{29}{\cancel{58}}}{\underset{8}{\cancel{16}}}=\frac{29}{8}$$

Se tiene en total $\frac{37}{8}$ = **4,625** @ en producto y tiene que cancelar un total de 159 Bs.

A continuación, desarrollamos los siguientes ejercicios en nuestros cuadernos:

Moisés tiene arvejas para la trilla. Para esto, debe pagar 150 Bs. Luego, recoge cuatro quintales y los traslada a la feria en auto, con un costo de 50 Bs. La venta la realiza por arroba a un precio de 100 Bs por arroba.

¿Cuál es el egreso?

¿Cuál es ingreso por la venta de la arveja?

¿Cuál es saldo total?

Como dato en un quintal hay cuatro arrobas.

Todo ingreso como venta de cualquier producto siempre será positivo.

Detalle	Cantidad	Costo unitario Bs. por arroba (@)	Costo total Bs.
Quintales de arveja.	4	100	
TOTAL, INGRESOS			

Todo egreso de cualquier tipo será negativo.

Detalle	Costo total Bs.
Cancelación por la trilla.	–150
Traslado a la feria.	–50
TOTAL, EGRESOS	

Doña Juana realiza el servicio de lavado de ropa. Para esto, se recogieron las siguientes cantidades de ropa: cinco kilos y medio de la familia Rosas, tres kilos y cuarto de la familia Poma, y seis kilos de la familia Soria.

- Doña Juana desea conocer cuántos kilos de ropa tiene que lavar.
- Si por kilo se cobra 15 Bs. cuanto tiene que cobrar de las tres familias.

Detalle	Cantidad/kilos de ropa	Costo unitario Bs. por kilo	Costo total Bs.
Familia Rosas cinco kilos y medio de ropa.	$5\frac{1}{2}$	**15**	
Familia Poma tres kilos y cuarto de ropa.	$3\frac{1}{4}$	**15**	
Familia Soria seis kilos de ropa.	**6**	**15**	
TOTAL			

Don Jorge, quien es conductor, lleva su auto de servicio público al mecánico, quien le pide los siguientes insumos: un bote de medio litro de líquido de frenos, tres litros y cuarto de gasolina, cuatro litros de aceite de motor, un litro y dos tercios de aceite para la corona, y dos litros y medio de aceite para la caja. Don Jorge quiere conocer:

- ¿Cuánto pagará de todos los líquidos?

- Conociendo que el precio promedio del litro de los líquidos es igual a 3,7 Bs.

Detalle	Cantidad/litros
Un bote de medio litro de líquido de frenos.	$\frac{1}{2}$
Tres litros y cuarto de gasolina.	$3\frac{1}{4}$
Aceite de motor cuatro litros.	4
Un litro y dos tercios de aceite para la corona.	$1\frac{2}{3}$
Dos litros y medio de aceite para la caja.	$2\frac{1}{2}$
TOTAL	

2) Doña Josefina tiene una tienda y solicita al refresquero los siguientes productos para la venta, asumiendo que cuenta con un capital de 1850 Bs.

Dos cajas de medio litro de refresco de durazno, cada una con un valor de 72 Bs. La caja contiene 12 unidades. Cuatro cajas de un litro de refresco de tumbo, cada una con un valor de 96 Bs. La caja contiene 12 unidades. Tres cajas de dos litros y medio de refresco de papaya, cada una con un valor de 120 Bs. La caja contiene 6 unidades. Dos cajas y media de tres litros de refresco de maracuyá, cada una con un valor de 150 Bs. La caja tiene 6 unidades.

Doña Josefina desea saber: ¿cuánto debe pagar en total por todas las cajas? ¿Le alcanzará su capital? Además, quiere conocer la cantidad total de litros de refresco que se venderán.

Detalle	Cantidad de cajas	Costo unitario Bs. por caja	Costo total Bs.	Cantidad de botellas	Total, de botellas	Litros	Total, litros
Dos cajas de medio litro de refresco de durazno.	2	72		12		$\frac{1}{2}$	
Cuatro cajas de litro de refresco de tumbo.	4	96		12		1	
Tres cajas de dos litros y medio de papaya.	3	120		6		$2\frac{1}{2}$	
Dos cajas y media de tres litros de maracuyá.	$2\frac{1}{2}$	150		6		3	
TOTAL							
TOTAL							

Vamos a la producción

Describamos en qué actividades específicas de nuestra vida diaria en las comunidades se utilizan los números racionales.

....

....

....

....

¿Qué dificultades se han tenido durante el desarrollo de la actividad?

....

....

....

....

Unidad temática N.º 2

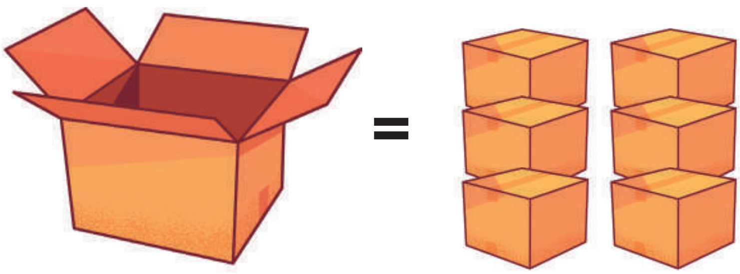
Potenciación y radicación

Partamos de nuestra experiencia

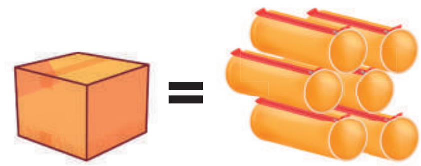
La matemática es una de las ciencias más antiguas del mundo que nos permite resolver diferentes problemas en distintas situaciones, así tenemos los siguientes problemas de aplicación:

1. Paola que trabaja en la "Librería Copitex", donde se hizo un pedido para el negocio, se compró un paquete de rotuladores (marcadores), cada paquete tiene 6 cajas, cada caja tiene 6 estuches y cada estuche tiene 6 rotuladores. ¿Cuántos rotuladores hay en un paquete?

Representación gráfica:



1 PAQUETE = 6 CAJAS



1 CAJA = 6 ESTUCHES

1 ESTUCHE = 6 ROTULADORES

Por lo tanto, en un paquete hay .... Rotuladores

ACTIVIDAD. Como en el ejemplo anterior desarrollemos el problema en el cuaderno de prácticas.

2. En la ciudad de Tarija el Centro de Educación Alternativa "Belgrano" cuenta con 30 aulas, cada aula 30 pupitres y cada pupitre 30 tornillos. ¿Cuántos tornillos hay en todo el centro educativo?

3. Una tienda recibe 10 cajas de chicles, en cada caja hay 10 paquetes de chicles, con 10 chicles cada uno.

   ¿Cuántos chicles recibió en total?

   Si cada chicle se vente a Bs. 10 ¿Cuánto dinero obtendrá por la venta de todos los chicles?

Profundicemos nuestros saberes y conocimientos

La potenciación es una operación que se utiliza para expresar el producto de dos o más factores iguales. La base de una potencia es el factor que se repite las veces que indique el exponente.

Términos de una potencia

$$5^4 = 625$$

Exponente: 4 — Potencia: 625 — Base: 5

- Si queremos calcular 3^3 haremos los siguiente: $3^3 = 3 \bullet 3 \bullet 3 = 27$
- Si queremos calcular $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ haremos los siguiente: $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \bullet \frac{2}{3} \bullet \frac{2}{3} \bullet \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$

ACTIVIDAD. Completemos las siguientes tablas con los cuadrados y cubos de las siguientes cantidades.

1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2	11^2	12^2	13^2	14^2	15^2
			16											

1^3	2^3	3^3	4^3	5^3	6^3	7^3	8^3	9^3	10^3	11^3	12^3	13^3	14^3	15^3
		27												

Signos de la potenciación

Ejemplos:

1) $(+5)^3 = (+5)(+5)(+5) = +125$

2) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = +\frac{4}{9}$

3) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = +\frac{8}{27}$

BASE	EXPONENTE	POTENCIA
Positiva	Par	Positiva
	Impar	
Negativa	Par	Positiva
	Impar	Negativa

$(-3)^3$	$(-5)^4$	$(-8)^2$	$(-4)^3$	$(-4)^2$	$(-1)^2$	$(-3)^5$	$(-7)^4$	$(-5)^7$	$(-6)^3$
−27									

ACTIVIDAD. Completemos la siguiente tabla con las bases positivas y negativas.

Propiedades de la potenciación

Nº	PROPIEDADES	FÓRMULA	EJEMPLO
1	Multiplicación de Potencias de igual base. Si las bases son iguales los exponentes se suman.	$a^n \bullet a^m = a^{n+m}$	$2^3 \bullet 2^5 = 2^{2+5} = 2^8$
2	División de potencias de igual base. Si las bases son iguales los exponentes se restan.	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\frac{3^6}{3^2} = a^{6-2} = 3^4$
3	Potencia de una potencia. Se debe multiplicar los exponentes.	$[(a)^n]^m = (a)^{n \bullet m}$	$(5^2)^5 = 5^{2x5} = 5^{10}$

4	Potencia de un producto. Cada uno de los factores es elevado al mismo exponente.	$[a \bullet b]^n = (a)^n \bullet (b)^n$	$[(3)(7)]^3 = 3^3 \bullet 7^3$
5	Potencia de un cociente. Cada uno de los factores es elevado al mismo exponente.	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{3^5}{2^5}$
6	Exponente cero. Todo número elevado a cero es igual a uno.	$a^0 = 1$	$7^0 = 1$
7	Exponente negativo.	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$5^{-3} = \frac{1}{5^3}$

Aprendamos juntos a resolver problemas de potenciación

EJEMPLOS:

1 Potencias de igual base.

a) $(9)^6 \times (9) \times (9)^3 = (9)^{6+1+3} = 9^{10}$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \text{x} \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^5$

c) $\left(-\frac{7}{4}\right)^3 \text{x} \left(-\frac{7}{4}\right)^4 = \left(-\frac{7}{4}\right)^{3+4} = \left(-\frac{7}{4}\right)^7$

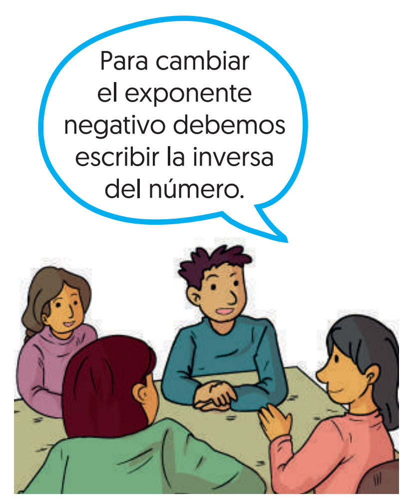
División de potencias de igual base.

a) $\frac{3^6}{3^2} = \frac{\cancel{3} \text{ x } \cancel{3} \text{ x } 3 \text{ x } 3 \text{ x } 3 \text{ x } 3}{\cancel{3} \text{ x } \cancel{3}} = 3^4$

Para este caso se puede anotar directamente 3 elevado a **(6 – 2 = 4)**, es decir:

$$\frac{3^6}{3^2} = 3^{6-2} = 3^4$$

b) $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^5}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\cancel{\left(\frac{2}{3}\right)}\cancel{\left(\frac{2}{3}\right)}\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)}{\cancel{\left(\frac{2}{3}\right)}\cancel{\left(\frac{2}{3}\right)}} = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3$



Para este caso se puede anotar directamente $\left(\frac{2}{3}\right)$ elevado a **(5 – 2 = 3)**, es decir:

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^5}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{5-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

c) $$\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^3}{\left(\frac{5}{3}\right)^7} = \left(\frac{5}{3}\right)^{3-7} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-4} \text{ o también} \dashrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^4$$

2) Potencia de una potencia.

a) $(2^3)^4 = (2^3)(2^3)(2^3)(2^3) = (2 \bullet 2 \bullet 2)(2 \bullet 2 \bullet 2)(2 \bullet 2 \bullet 2)(2 \bullet 2 \bullet 2) = 2^{12}$

Observa que el mismo resultado se puede obtener multiplicando los exponentes:

$$(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12}$$

b) $$\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^6$$

$$\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^{2 \times 3} = \left(\frac{3}{4}\right)^6$$

3) Potencia de un producto.

a) $$\left[(2^3) \bullet (3)^5\right]^4 = 2^{3 \bullet 4} \bullet (3)^{5 \times 4}$$

$$= (2)^{12} \times (3)^{20}$$

b) $$\left[\left(\frac{2}{3}\right) \bullet \left(-\frac{5}{2}\right)\right]^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \bullet \left(-\frac{5}{4}\right)^3 = -\frac{\cancel{2^3} \bullet 5^3}{3^3 \bullet \cancel{2^3}} = -\frac{5^3}{3^3}$$

4) Potencia de un cociente.

a) $$\left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{5^3}{7^3}$$

c) $$\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\frac{3^3}{5^5}}{\frac{2^2}{3^2}} = \frac{3^3 \times 3^2}{5^3 \times 2^2} = \frac{3^{3+2}}{5^3 \times 2^2} = \frac{3^5}{5^3 \times 2^2}$$

ACTIVIDAD. Resolvamos las siguientes potencias aplicando las propiedades en el cuaderno de ejercicios.

1) $3^6 \times 3 \times 3^7 \times 3^2 =$

2) $5^3 \times 5^2 \times 5^8 \times 5^4 =$

3) $[\,(4^3)^2\,]^2 =$

4) $\left(\frac{5}{4}\right)^7 \text{x} \left(\frac{5}{4}\right)^2 \text{x} \left(\frac{5}{4}\right)^5 =$

5) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^3 \text{x} \left(\frac{4}{5}\right)^2\right]^2 =$

6) $\left\{\left[\left(\frac{3}{7}\right)^2\right]^8\right\}^3 =$

Radicación

La radicación es la operación que permite calcular la base de una potenciación si se conoce la potencia y el exponente. Para hallar la raíz de cierta cantidad tenemos que buscar que un número multiplicado por sí mismo sea igual a dicha cantidad tantas veces indique el índice.

TERMINOS DE UN RADICAL

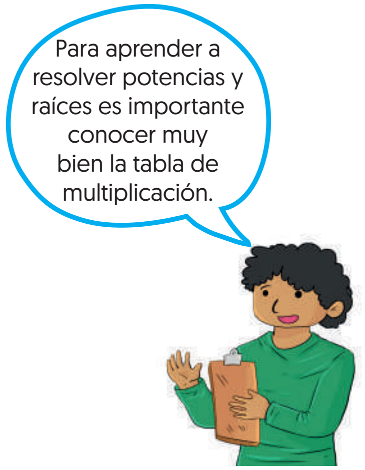
Índice de la raiz

Raiz

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

Radicando

Signo radical



Los radicales más conocidos son:

Raíz Cuadrada	Raíz Cubica
$\sqrt{16} = \pm 4$	$\sqrt[3]{125} = 5$
El índice es 2 pero no se anota	El índice es 3

Aprendamos juntos a resolver problemas de radicación

EJEMPLOS:

1) **Resolver:** $\sqrt[3]{8}$

Se busca un número multiplicado 3 veces nos dé como resultado 8.
El número que multiplicado 3 veces da como resultado 8 es el número 2.

Entonces: $\sqrt[3]{8} = 2$

2) **Resolver:** $\sqrt{49} = 7 \bullet 7 = 49$ **Entonces:** $\sqrt{49} = 7^2$

TABLA DE RAÍZ CUADRADA Y RAÍZ CÚBICA

CUADRADA RAÍZ CUADRADA			RAÍZ CÚBICA		
$\sqrt{1}=1$	$\sqrt{25}=5$	$\sqrt{81}=9$	$\sqrt[3]{1}=1$	$\sqrt[3]{125}=5$	$\sqrt[3]{729}=9$
$\sqrt{4}=2$	$\sqrt{36}=6$	$\sqrt{100}=10$	$\sqrt[3]{8}=2$	$\sqrt[3]{216}=6$	$\sqrt[3]{1000}=10$
$\sqrt{9}=3$	$\sqrt{49}=7$	$\sqrt{121}=11$	$\sqrt[3]{27}=3$	$\sqrt[3]{343}=7$	$\sqrt[3]{1331}=11$
$\sqrt{16}=4$	$\sqrt{64}=8$	$\sqrt{144}=12$	$\sqrt[3]{64}=4$	$\sqrt[3]{512}=8$	$\sqrt[3]{1728}=12$

Signos de una raíz

1) Si el índice de la raíz es impar, el resultado tiene el mismo signo que el radicando.

$\sqrt[3]{8}=2$ $\quad$ $\sqrt[3]{-64}=-4$ $\quad$ $\sqrt[5]{32}=2$

$\sqrt[3]{-8}=-2$ $\quad$ $\sqrt[5]{-32}=-2$ $\quad$ $\sqrt[3]{125}=5$

2) Si el índice de la raíz es par, y el radicando es positivo existen dos soluciones; una positiva y otra negativa.

$\sqrt{4}=\pm 2$ significa que $\sqrt{4}$ es **(+2)** y tambien **(−2)**

Entonces:

$$\sqrt{16}=+4 \text{ porque } (+4)^2=16$$

$$\sqrt{16}=-4 \text{ porque } (-4)^2=16$$

3) Si el índice de la raíz es par, y el radicando tiene signo negativo no existe solución.

$\sqrt{4}=?$ no hay resultado

Ningún número elevado a 2 dará como resultado un número negativo.
Cualquier cantidad elevado al cuadrado siempre será positivo.

ACTIVIDAD. Completemos las raíces de los siguientes ejemplos:

$\sqrt[3]{-125}$	$\sqrt[4]{-81}$	$\sqrt[4]{16}$	$\sqrt[7]{-128}$	$\sqrt[5]{243}$	$\sqrt[3]{-1000}$	$\sqrt[3]{1000}$	$\sqrt{-100}$	$\sqrt[4]{625}$
−5								

Raíces inexactas

Para algunas operaciones es necesario introducir o sacar factores de un radical. Esto se puede efectuar aplicando la descomposición en factores primos.

EJEMPLOS.

1) $\sqrt{18} = \sqrt{2 \bullet 3 \bullet 3} = \sqrt{2 \bullet 3^2} = \sqrt{2} \bullet \sqrt{3^2} = 3\sqrt{2}$

2) $\sqrt[3]{48} = \sqrt[3]{2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 3} = \sqrt[3]{2^3 \bullet 2 \bullet 3} = 2\sqrt[3]{2 \bullet 3} = 2\sqrt[3]{6}$

ACTIVIDAD. En el cuaderno de prácticas resolvamos en tu cuaderno los siguientes ejercicios sacando todos los factores posibles de los radicales:

1) $\sqrt[3]{27} =$ 2) $\sqrt[3]{343} =$ 3) $\sqrt[3]{-64} =$ 4) $\sqrt[5]{-32} =$ 5) $\sqrt{400} =$

6) $\sqrt{108} =$ 7) $\sqrt[3]{81} =$ 8) $\sqrt{27} =$ 9) $\sqrt[3]{24} =$ 10) $\sqrt{120} =$

Valoramos nuestros conocimientos adquiridos

La potenciación y la radicación desempeñan roles diversos en la vida cotidiana. Exploremos algunos de sus usos y abordemos las preguntas para la reflexión:

Intereses compuestos en finanzas:

- ¿Cómo influye la potenciación en la acumulación de intereses a lo largo del tiempo?

R.- ....
....
....

Cálculos de áreas y volúmenes:

- ¿Cómo la radicación se relaciona con la medición de áreas y volúmenes en la vida cotidiana?

R.- ....
....
....

¿Puedes identificar situaciones cotidianas adicionales donde la potenciación y la radicación son herramientas clave para resolver problemas?

R.- ....
....
....

Vamos a la producción

ANALICEMOS Y RESPONDAMOS LAS SIGUIENTES PREGUNTAS

¿Qué ejercicios aprendimos con más facilidad?

¿Cuáles me resultaron difíciles?

¿Cómo fue mi participación en clase?

¿En qué actividades productivas podemos emplear potencias?

Calculemos las siguientes expresiones, simplificando el resultado a su forma más reducida, si es posible:

$\left(\frac{3}{4}\right)^{2} =$

$\left(\frac{5}{6}\right)^{3} =$

$\left(-\frac{2}{3}\right)^{4} =$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{0} =$

$\left(\frac{7}{8}\right)^{-2} =$

Preguntas para la Reflexión:

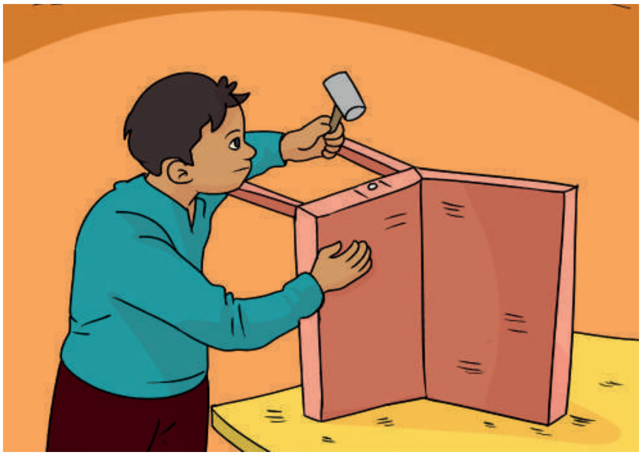
1. ¿Cómo afecta el exponente positivo o negativo al valor resultante de la potenciación en el contexto de números racionales?
2. ¿Qué observamos en el resultado cuando elevas un número racional a la potencia cero?
3. ¿Cuál es la relación entre la fracción original y el resultado de la potenciación? ¿Cómo podemos explicar esto en términos sencillos?

Unidad temática N.º 3

Razones y proporciones en el manejo de los recursos naturales

Partamos de nuestra experiencia

En la comunidad Los Manguitos, de San Borja, Beni, Bolivia, los estudiantes construyen sillas para vender y así mantener a sus familias.



¿SABÍAS QUE?

Al construir sillas, utilizamos medidas, y si deseamos hacerlas más grandes o más pequeñas, estamos aplicando razones y proporciones.

ACTIVIDAD. A partir de la experiencia descrita respondamos las siguientes preguntas:

- ¿Qué conocimientos requerimos para calcular las medidas en la construcción de las sillas?

R.- ....

....

....

....

....

- ¿Qué actividades productivas que se realizan en nuestra comunidad consideramos que requieren conocimientos en razones o proporciones?

R.- ....

....

....

....

....

Profundicemos nuestros saberes y conocimientos

Razón de cantidades homogéneas

Razón, es el resultado de comparar dos cantidades ya sea por resta (razón aritmética), o por división (razón geométrica); los elementos de una razón son antecedentes y consecuentes, primero y segundo elementos de la comparación.

RAZÓN ARITMÉTICA antecedente – consecuente = razón a – b = r	RAZÓN GEOMÉTRICA antecedente ÷ consecuente = razón a ÷ b = r
Es la comparación mediante la sustracción. **a – b = valor de la razón aritmética.** **Ejemplo1:** Edad de Miguel 30 Edad de Juan 12 **30 – 12 = 18 razón**	Es la comparación mediante la división. **Ejemplo 1:** El valor de la razón geométrica entre 1 y 2 es:1/2 **Ejemplo 2:** Una bolsa grande de maíz pesa 2,5 Kg y otra más pequeña 0,5 Kg. La razón es 2,5/0,5=0,5; se lee "2,5 es a 0,5" y nos indica que la caja grande pesa 5 veces más que la pequeña.

Nota: No confundir razón con fracción: en una razón los números a y b pueden ser decimales y en una fracción estos números son enteros.

ACTIVIDAD. A partir de lo que hemos aprendido, resolvamos los siguientes problemas matemáticos:

a) La razón aritmética entre 2 y 8 es:

b) La razón geométrica entre 18 y 6 es:

c) La razón geométrica entre 100 y 50 es:

d) La razón aritmética entre 16 y 24:

Proporciones

Proporción, es el resultado de tener dos razones de igual valor.

Proporción Aritmética, es la igualación de dos razones aritméticas.	**Proporción Geométrica,** es la igualación de dos razones geométricas.
Ejemplo 1: 2, 4, 6, 8, 10 = 2	**Ejemplo 1:** $\frac{7}{3} = \frac{14}{5} = 2{,}3$
Ejemplo 2: 3, 6, 9, 12, 15 = 3	**Ejemplo 2:** $\frac{10}{50} = \frac{5}{25} = 0{,}2$

Propiedades

En toda proporción geométrica el producto de los extremos es igual al producto de los medios.	**Así:** $\frac{10}{5} = \frac{6}{3}$ $10 \bullet 3 = 6 \bullet 5$ $30 = 30$

Cálculo de términos desconocidos de una proporción

¿Cómo se calcula el término desconocido de una proporción?

Sabemos que, si dos fracciones son equivalentes, al multiplicar en cruz el resultado es el mismo, aplicando la propiedad anteriormente mencionada.

ASÍ:	COMPROBANDO:
$\frac{x}{3} = \frac{15}{9}$	$\frac{x}{3} = \frac{15}{9}$
$X \bullet 9 = 3 \bullet 15$	$\frac{5}{3} = \frac{15}{9}$
$x = \frac{3 \bullet 15}{9}$	$45 = 45$
$x = \frac{45}{9}$	
$x = 5$	

ACTIVIDAD. En nuestros cuadernos, calculemos los términos desconocidos de las siguientes proposiciones

1. $\frac{X}{9} = \frac{8}{18}$
2. $\frac{X}{22} = \frac{4}{11}$
3. $\frac{X}{12} = \frac{19}{9}$
4. $\frac{X}{20} = \frac{16}{30}$
5. $\frac{X}{19} = \frac{25}{9}$
6. $\frac{X}{17} = \frac{8}{2}$

Magnitudes directamente e inversamente proporcionales

a) Magnitudes directamente proporcionales. Son dos magnitudes que cuando al aumentar o disminuir una de ellas la otra aumenta o disminuye de la misma forma.

b) Magnitudes inversamente proporcionales. Son dos magnitudes que cuando al aumentar una magnitud, la otra disminuye y viceversa.

N° amasadores de pan.	1	2	3	4	5	6	7
N° de panes horneados.	100	200	300	400	500	600	700

N° Trabajadores en una la siembra de hortalizas en una hectárea de terreno.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Tiempo de duración de la siembra.	**25 d**	**12,5 d**	**8,3 d**	**6,25 d**	**5 d**

Regla de tres simple en la vida familiar

La regla de tres simple es una operación que tiene por objeto hallar el cuarto término de una proporción cuando se conocen sólo tres términos o datos, puede ser directa e inversa, según que las magnitudes intervenidas sean directas o inversamente proporcionales.

EJEMPLO 1 (Directa): Si $us. 1(cuesta Bs 6,94 Bs) ¿Cuánto costarán $us 60?	**EJEMPLO 2 (Directa):** Un coche recorre 240 km en 3 horas. ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido en 2 horas?
$us 1.- --→ Bs 6.94. - $us 60.- --→ X $\frac{1 \text{ \$us}}{60 \text{ \$us}} = \frac{6.94 \text{ Bs}}{X}$ X = 6,94 Bs x 60 X = 416,4 Bs	240 km --→ 3hrs. x --→ 2hrs $\frac{240 \text{ km}}{X} = \frac{3 \text{ hrs.}}{2 \text{ hrs.}}$ 2 • 240 = 3 • X $X = \frac{2.240 \text{ km}}{3}$ x = 160 km
EJEMPLO 3 (Inversa): 3 obreros construyen el muro de una casa en 12 horas, ¿Cuánto tardarán en construirlo 6 obreros?	3 obreros --→ 12 hrs. 6 obreros --→ x $\frac{6 \text{ obreros}}{3 \text{ obreros}} = \frac{12 \text{ hrs.}}{X}$ $X = \frac{12 \text{ hrs. x } 3}{6}$ x = 6 hrs.

Porcentajes

Ejemplo: En la comunidad Manguito del Distrito de San Borja, los participantes venden maíz al 18 % de descuento por cada pago al contado. ¿Cuánto deberé pagar por un quintal cuyo costo es de Bs. 120?

Bs.120 --→ 100 %

x --→ 18 %.

$$X = \frac{\text{Bs. } 120 \bullet 8\%}{100\%}$$

x = Bs.21,6

Porcentaje es un símbolo matemático que representa una cantidad dada como una fracción en 100 partes iguales.

El símbolo (%) que aparece al lado de los números significan: (tanto por ciento).

Respuesta: Deberá pagar Bs.120 Bs.

Descuento de pago 21,6 Bs.

Tendrá que cancelar 98,4 Bs por el quintal si lo paga al contado.

ACTIVIDAD. En el cuaderno de prácticas resolvamos los siguientes problemas de porcentaje.

Calcula el 28% de:

a) 280 **b) 300** **c) 500**

d) 100 **e) 20** **f) 6340**

Resolución y cálculo del interés simple en el manejo de los recursos naturales

La fórmula para calcular el interés simple es:

$I = C_o \bullet i \bullet n$

Donde:

I = Interés simple

C_o = Capital inicial

i = Tasa de interés

n = tiempo

INTERÉS: El interés se refiere a la cantidad adicional de dinero que se paga o se gana en una transacción financiera sobre una cantidad principal.
Interés simple: El interés simple se calcula solo sobre la cantidad principal original durante un período específico de tiempo.

Aprendamos juntos a resolver problemas de interés simple

Ejemplo 1: Calculemos el interés simple que se debe pagar por un préstamo de Bs. 500000 al 2% mensual, durante 2 meses.

$I = ?$

C_o = Bs. 500.000

$i = 2\%$ mensual $= \frac{2}{100} = 0{,}02$

n = 2 meses

$I = C_o \bullet i \bullet n$

$I = 500.000 \times 0{,}02 \times 2$

$I = 20.000$

Ejemplo 2: Calculemos el interés simple que se debe pagar por un préstamo de Bs. 35000 al 5% mensual, durante 2 años.

DATOS

$I = ?$

C_o = Bs. 35.000

$i = 5\%$ mensual $= \frac{5}{100} = 0{,}05$

n = 2 años = 24 meses

$I = Co \bullet i \bullet n$

$I = 35.000 \times 0{,}05 \times 24$

$I = 42000$

ACTIVIDAD. En el cuaderno de prácticas resolvamos los siguientes problemas de interés simple.

- Calcular el interés simple que se debe pagar por un préstamo de Bs 9.000 al 12% mensual en 20 meses.
- ¿Cuánto produce pagara de interés de Bs. 8.200 que se ha prestado al 25% mensual durante 90 días?
- Un banco presta Bs. 10.000 a una persona con un interés del 20% anual. ¿Qué cantidad debe devolver al banco después de dos años?
- ¿Qué interés nos cobrará una persona por un préstamo de Bs 175 al 2,5% mensual durante 2 años?
- Carlos presta a Mario Bs. 80.000 al 30% anual, con la condición de que mensualmente le pague los intereses ¿Cuánto dinero ha entregado Mario a Carlos después de 9 meses?

Una vez resueltos los ejercicios planteados, escaneemos el código QR para verificar nuestras respuestas, o también puedes ingresar al siguiente enlace:

https://forms.gle/abNDppV6LsB8DdhC7

Estadística aplicada

Tipos de estadística

Hay dos tipos de estadística: la descriptiva y la inferencial.

a) **Estadística descriptiva:** se organiza a través de tablas y gráficos que te permiten presentar los resultados de forma ordenada.

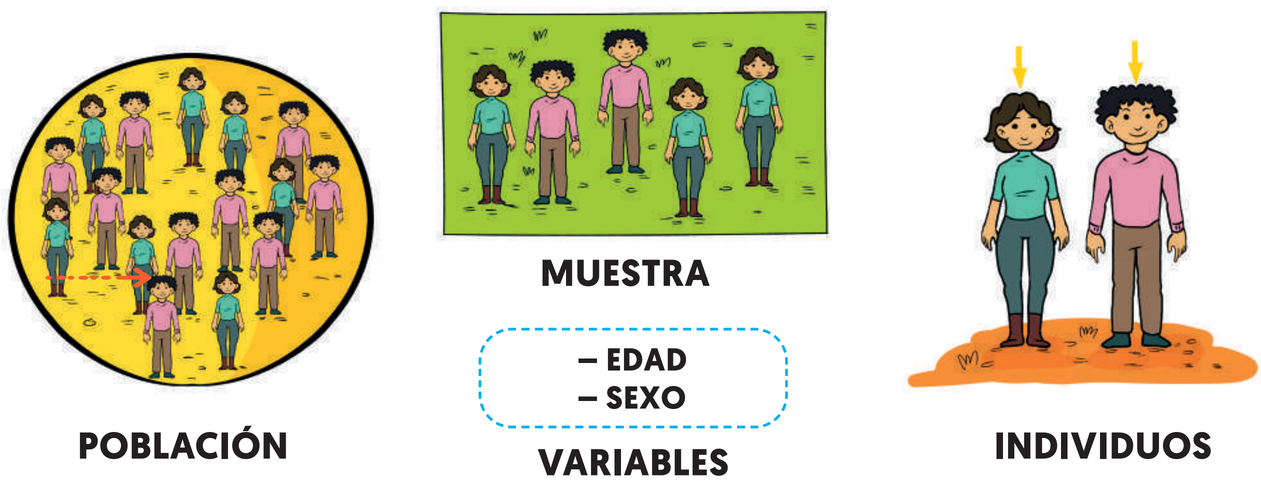
b) **La estadística inferencial:** se encarga de realizar conclusiones y deducciones a partir de una muestra de datos.

Estadística, la estadística se define como la ciencia que se ocupa de recopilar, organizar, analizar, interpretar y presentar datos. Su objetivo principal es extraer información significativa a partir de conjuntos de datos, proporcionando herramientas para entender patrones, tendencias y variaciones en fenómenos observados.

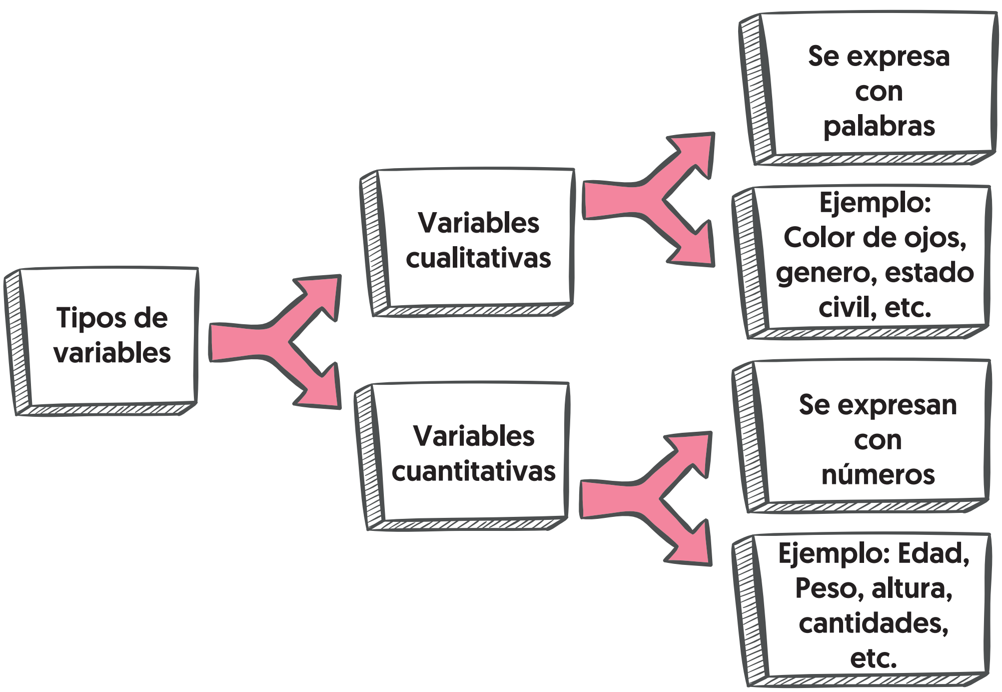
Ventajas de la estadística

- Resume grandes cantidades de información para hacer comparaciones y predecir resultados.
- Útil al momento de tomar decisiones.

Conceptos básicos de estadística:



- **Población:** Conjunto total de personas, animales, objetos o elementos sobre los que se desea obtener una información.
- **Muestra:** Parte del total de una población sobre la que se obtiene alguna información
- **Variable:** Es una característica o un fenómeno observado de la población.



Frecuencia absoluta y relativa

- La frecuencia absoluta nos indica la cantidad de veces que se repite cada opción.
- La frecuencia relativa nos indica que parte del total corresponde a cada opción.

Ejemplo 1: En un CEA se realiza una encuesta a un grupo de 30 participantes sobre su asignatura favorita.

Variable	Número de estudiantes	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa fr = ni	Frecuencia relativa porcentual (%) fr · 100 %
Matemática	𝍸 𝍸	$n_1 = 10$	$f_1 = \frac{10}{30} = 0{,}33$	0,33 • 100 = 33
Comunicación y Lenguajes	𝍸	$n_2 = 5$	$f_2 = \frac{5}{30} = 0{,}17$	0,17 • 100 = 17
Ciencias Sociales	𝍸	$n_3 = 5$	$f_3 = \frac{5}{30} = 0{,}17$	0,17 • 100 = 17
Ciencias Naturales	𝍸 𝍸	$n_4 = 10$	$f_4 = \frac{10}{30} = 0{,}33$	0,33 • 100 = 33
TOTAL		**N = 30**	**1**	**100**

1. ¿Cuántos estudiantes les gusta el área de Matemática? R.	2. ¿Qué porcentaje de participantes les gusta el área Ciencias Naturales? R. ....
3. ¿Qué porcentaje de estudiantes les gusta el área Comunicación Lenguajes? R.	4. ¿Cuánto por ciento de participantes les gusta el área de Ciencias Sociales? R. ....

Se encuesta a 80 participantes sobre su deporte favorito y obtenemos las siguientes respuestas: 30 participantes prefieren fútbol, 20 participantes prefieren natación, 18 participantes prefieren ciclismo y a 12 participantes no les gusta el deporte. Se encuesta a 80 participantes sobre su deporte favorito y obtenemos las siguientes respuestas: 30 participantes prefieren fútbol, 20 participantes prefieren natación, 18 participantes prefieren ciclismo y a 12 participantes no les gusta el deporte.

En el cuaderno de prácticas resolvamos los siguientes problemas:

Problemas comunitarios que usan razones y proporciones en procesos productivos

1. De acuerdo con los datos del Ministerio Público, se suman 38 casos de feminicidio en el país durante la pasada gestión 2022. En La Paz se registraron 10 casos, 8 en Santa Cruz, 7 en Cochabamba, 5 en Oruro, 3 en Potosí, 2 en Beni, 2 en Chuquisaca y 1 en Pando. ¿A qué porcentaje corresponde cada departamento?
2. Daniel tenía un sueldo mensual de Bs 2500 y le aumentaron un 4% en el año 2019. ¿Cuánto es el sueldo actual de Julio?
3. En Bolivia existen 10.027.643 de habitantes (datos estimados en 2007, 2008 y 2009). De 0 a 14 años: 35%. De 15 a 64 años: 60,4%. De 65 años o más: 4,6% ¿Qué cantidad de habitantes recibirá la vacuna en cada rango de edad, tomando en cuenta los porcentajes dados? ¿Qué cantidad de habitantes recibirán la vacuna si solamente se vacunara a los mayores de 15 años?
4. Para tener un desayuno nutritivo, una madre utiliza 7 naranjas y obtiene 3 vasos de jugo. ¿Cuántas naranjas necesita para obtener 15 vasos de jugo?

5. Al construir la Catedral de Santa Cruz, 5 obreros abren una zanja de 80 metros. ¿Cuántos metros abrirán 9 obreros?

Reflexionemos a partir de las siguientes preguntas:

1. Mencionemos desde nuestra percepción qué tan importante es el trabajar con las razones y proporciones

   R.- ....

   ....

2. ¿Qué utilidad tienen las reglas aprendidas sobre proporcionalidad inversa y directa en nuestro contexto?

   R.- ....

   ....

3. ¿Qué tan importante es la interpretación de gráficas de los ejercicios planteados en estadísticas para hacer una lectura contextual?

   R.- ....

   ....

4. ¿Cómo se puede moldear el rumbo de la historia y tomar decisiones de impacto tomando en cuenta la estadística?

   R.- ....

   ....

Vamos a la producción

1. Elaboremos dos portalápices, uno pequeño y otro grande, aplicando las proporciones.
2. Investiguemos el porcentaje de mujeres y varones que asisten a clases en cada curso del nivel secundario.
3. Realicemos un trabajo de campo donde puedas interpretar y recopilar datos sobre las necesidades y problemáticas que existen en nuestra realidad. Luego, determinaremos el porcentaje de las causas y efectos que estas conllevan.

Recordemos lo aprendido y resolvamos los siguientes casos

Elegimos el inciso correcto:

1. ¿Qué es una razón aritmética?

a) Compara dos cantidades a través de los decimales

b) Comparar dos cantidades a través de la división

c) Comparar dos cantidades a través de la resta

2. La razón geométrica entre 200 y 50 es:

a) 4 **b) 400** **c) 40**

3. ¿Cuál es la razón de la siguiente proporción: 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72?

a) **8** **b) 80** **c) 2,5**

Elegimos si el enunciado es falso o verdadero.

4. Magnitudes directamente proporcionales, son dos magnitudes que cuando al aumentar o disminuir una de ellas, la otra aumenta o disminuye de la misma forma.

a) **Falso** **b) Verdadero**

5. La frecuencia absoluta nos indica la cantidad de veces que se repite cada opción.

a) **Falso** **b) Verdadero**

6. El interés simple se puede definir como el interés cobrado sobre la cantidad total del capital inicial sin tomar en cuenta un período de tiempo particular.

a) **Falso** **b) Verdadero**

7. Tres Carpinteros hacen 6 muebles en una semana, si les piden hacer 32 muebles en una semana. ¿Cuántos Carpinteros necesitan para concluir el trabajo?*

a) **18** **b) 16** **c) 24**

8. Si 8 obreros construyen un puente en 16 días, 12 obreros, ¿Cuánto tiempo construirían el mismo puente?

a) **42** **b) 12** **c) 10**

9. Humberto Lero tenía un sueldo mensual de Bs 2500 y le aumentaron el 4% en el año 2022 ¿Cuánto es el sueldo de Humberto actualmente?

a) **3500** **b) 2504** **c) 2600**

10. Carlos presta a Mario Bs 80.000 al 30% anual, con la condición de que mensualmente le pague los intereses ¿Cuánto dinero ha entregado Mario a Carlos después de 9 meses?

a) **11880** **b) 18800** **c) 18000**

Módulo 2

Expresiones algebraicas en la vida social y económica

Objetivo holístico del módulo

Valoramos la importancia de estudiar las matemáticas, a través del estudio de operaciones y expresiones algebraicas, factorización de polinomios y fracciones algebraicas, aplicando las herramientas técnicas y procedimientos matemáticos , para cuantificar los recursos socio productivos de la región.

Unidad temática N.º 1

Expresiones algebraicas en la vida familiar y comunal

Partamos de nuestra experiencia

Don Carlos cosechó de su huerto de nogal durante seis días las siguientes cantidades de nueces: primer día 500, segundo día 430, tercer día 820, cuarto día 509, quinto día 350, sexto día 250 nueces.

Suma algebraica: sumamos lo recolectado por días.

$$500n + 430n + 820n + 510n + 350n + 250n = 2860n$$

Todos los términos de esta suma son semejantes porque tienen la misma parte literal (n). entonces se suman los coeficientes y el resultado lleva la misma parte literal.

Por lo tanto, don Carlos recolectó 2860 nueces en 6 días.

Recordemos que se suman expresiones algebraicas que tienen la misma variable con el mismo exponente.

Otro ejemplo.

Observemos con mucha atención el puesto de venta de doña Francisca:

ACTIVIDAD. En base a lo que observamos en la fotografía, respondemos:

1. Observemos detenidamente la imagen y describir lo que se ve:

   R.- ....

2. Que productos están a la venta:

   R.- ....

3. Como está organizado el puesto de venta:

   R.- ....

4. Como se puede simbolizar cada producto:

   R.- ....

ACTIVIDAD. Con la ayuda del diccionario encontramos la definición de:

a) Variable:

b) Coeficiente numérico:

c) Exponente:

d) Término:

Profundicemos nuestros saberes y conocimientos

Término algebraico

Está compuesto por signo un signo positivo (+) o negativo (-), variables (letras) y exponentes.

Signo (-)

Exponentes (4; −2)

$$-\frac{1}{2}a^{4}b^{-2}$$

Variable (a, b)

Coeficiente numérico

ACTIVIDAD. Analicemos y completemos la siguiente tabla:

TÉRMINO	SIGNO	COEFICIENTE NUMÉRICO	VARIABLES (LETRAS)	EXPONENTES
$\frac{4}{3}x^{3}y^{-2}$				
$-7a^{2}b^{4}$				
$-\sqrt{6x^{4}y}$				

Términos semejantes:

Los términos son semejantes si sus variables (letras) y exponentes son iguales.

$-3\frac{4}{6}ab^{2}$ Son semejantes porque sus variables (letras) y exponentes son iguales $-0.34ab^{2}$

$3x^{2}$ Son semejantes porque sus variables (letras) y exponentes son iguales $-\sqrt{2}x^{2}$

ACTIVIDAD. Unimos los términos semejantes con una línea:

$-\frac{4}{6}xy^4$ $\qquad$ $-\frac{9}{a}y^5$

$\sqrt[3]{4x^2y^5}$ $\qquad$ $\sqrt{2a^{-1}}$

$-\frac{4}{6}b^2c$ $\qquad$ $-\sqrt{\frac{1}{5}}xy^4$

a^{-1} $\qquad$ $\sqrt{2b^2c}$

$\frac{1}{6a}y^5$ $\qquad$ $-4{,}65\,x^2y^5$

Expresiones algebraicas

Se define como expresión algebraica a aquella donde se presentan uno o más términos algebraicos separados por signos de adición (+) o sustracción (-)

$$x^4 - 7x^2 + 4x + 11$$

$$3\sqrt{4x^2y^5} + 5x$$

$$\frac{5xp + 7pm}{mn - 5k}$$

Clasificación de expresiones algebraicas

TÉRMINO ALGEBRAICO	EJEMPLOS
Monomio: Expresión algebraica que consta de un solo término	$\frac{4}{9}a^4b^{-2}$ $-x^5y^{-1}$
Binomio: Expresión compuesta de dos términos algebraicos asociadas por los signos más o menos.	$0{,}23a^3b^3 + a^2b^2$ $-5x + \frac{1}{6}y$
Trinomio: Expresión compuesta de tres términos algebraicos asociadas por los signos más o menos.	$-c + 6d - a$ $3x + 4y - z$
Polinomio: Compuesta por varios términos	$\sqrt{2b^2c} + 5a - 6d - e$ $\sqrt{\frac{1}{3}}x^3 + 5x^2 - 6x - 1$

Polinomios

Un polinomio es una expresión algebraica compuesta por la suma de dos o más términos.

Ejemplo $12\,mn^2 + 3m^2\,n - 6mn$

$+ 12\,mn^2$	Es un término
$+ 3m^2\,n$	Es otro término
$- 6mn$	Es otro término distinto

Grados y orden de un polinomio

a) Grado de un término algebraico:

Se llama grado de un término algebraico a la suma de los exponentes de las variables (letras).

a) El grado de: $-8a^2\,b^3$ **es** $2 + 3 = 5$

b) El grado de: $a^2\,b^7$ **es** $2 + 7 = 9$

ACTIVIDAD. Determinemos el grado de los monomios:

TÉRMINO	GRADO
$-3\,a^2b^5c$	
$3^2x^4y^3$	
$-\sqrt{8x^2y^2z}$	

b) Grado de un polinomio

El grado de un polinomio es el mayor grado de los términos que lo componen.

- El grado del polinomio: $\underbrace{\sqrt{\frac{1}{3}}\,x^3\,y}_{3+1=4} + \underbrace{5x^2\,y}_{2+1=3} - \underbrace{6xy}_{1+1=2} - 1$ es de grado 4.

- El grado del polinomio es: $2a^2 + 5a - 6$ es de grado 2.

Actividad Determinar el grado de los polinomios.

POLINOMIOS	GRADO
$-3a^3 + 4a^2 - a + 2$	
$32x^4y^3 - x^3y^2 - xy$	
$-\sqrt{8x^2y^2} + 4xy - 5$	

Orden de un polinomio

a) Creciente: cuando el exponente de una de las letras va en aumento.

$$-1 - a + 4a^2 + 2a^3$$

$$6 - xy + x^3y^2 + 2x^4y^3$$

b) Decreciente: cuando el exponente de una de las letras va de mayor a menor.

$$-\frac{2}{5}x^2y^2 + 2xy - 5$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\,a3 + 6a2 - 9a - 1$$

ACTIVIDAD. Ordenemos en forma:

POLINOMIOS	DECRECIENTE
$7x^3y^2 + 1 - \frac{3}{2}xy - 2x^4y^3$	
$-ab - 3a^4b^3 - 5a^3b^2$	
$\sqrt{7} + 4xy - 5x^2y^2$	

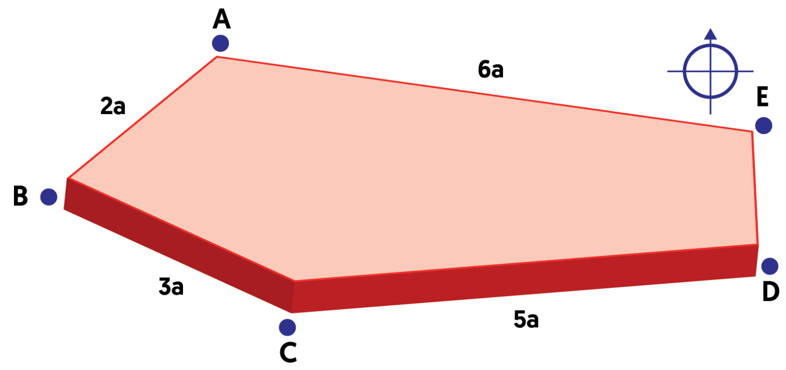
POLINOMIOS	CRECIENTE
$8a^3b^3 + \frac{2}{3} - \frac{3}{4}ab - 5a^4b^4$	
$-ab - 5a^3b^2 - 3a^4b^3 + 23$	
$\sqrt[3]{3xy} - \sqrt{7} + x^2y^2$	

Valoramos nuestros conocimientos adquiridos

Resolvamos juntos a los siguientes problemas.

Ejemplo 1:

José tiene un terreno y quiere conocer el perímetro para realizar el amurallado.



Para encontrar el perimetro se tiene que sumar todo el contorno del plano del terreno de esa forma se determinara la longitud en unidades de longitud

Perimetro **=2a + 3a + 5a + a + 6a = 17** a longitudes lineales

Si a **= 10 metros** se calcula los metros lineales → se tiene **Perímetro = 17 x 10 = 170 m.**

Ejemplo 2

Pedro, mayorista de verduras, entrega en el mercado a Juana tres cajas de tomate, seis cajas de pimentón, cinco cajas de locoto, dos cajas y cuarto de achojcha y una caja de vainita. A doña Beatriz le entrega dos cajas de tomate, tres cajas de locoto, cuatro cajas de vainita, cuarto cajas y dos cuartos de achojcha, y una caja de pimentón. A doña Norma le entrega cinco cajas de tomate, dos cajas de achojcha, tres cajas de pimentón, dos cajas de locoto, y tres cajas y media de vainita.

Se quiere conocer cuántas cajas de cada producto se entregó en total.

Para resolver se puede simbolizar cada producto como:

Tomate = t   Pimentón = p   Locoto = l   Achojcha = a   Vainita = v

Tomando en cuenta la información se puede ordenar de la siguiente manera.

Juana: $3t + 6p + 5l + 2\frac{1}{4}a + v$

Beatriz: $2t + p + 3l + 4\frac{2}{3}a + 4v$

Norma: $5t + 3p + 2l + 2a + 3\frac{1}{2}v$

Para conocer las cantidades solo se suman todos los productos semejantes.

$3t + 2t + 5t \quad = 10t$ **son diez cajas de tomate**

$6p + p + 3p \quad = 10p$ **son diez cajas de pimentón**

$5l + 3l + 2l \quad = 10l$ **son diez cajas de locoto**

$$2\frac{1}{4}a + 4\frac{2}{4}a + 2a = \underbrace{\frac{9}{4}a + \frac{18}{4}a}_{\frac{9+18}{4}} + 2a = \underbrace{\frac{27}{4}a + 2a}_{\frac{27+8}{4}} = \frac{35}{4}a = 8\frac{3}{4}a$$

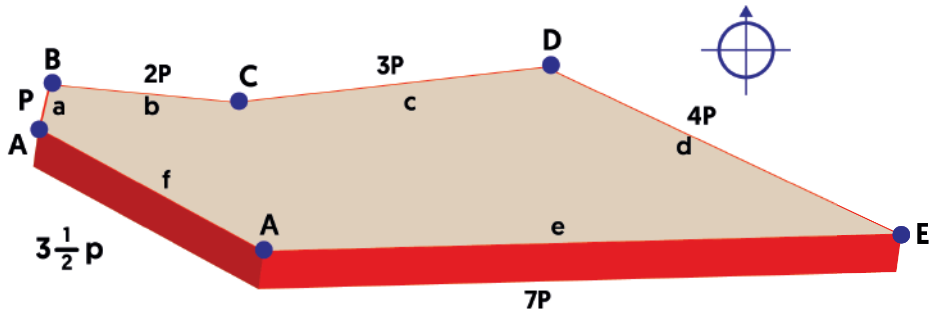
Son ocho cajas y tres cuartos de achojcha .

$$v + 4v + 3\frac{1}{2}v = 8\frac{1}{2}v$$

son ocho cajas y media de vainita.

ACTIVIDAD. Apoyados en lo aprendido en el cuaderno de prácticas resolvemos los siguientes problemas:

1. Determinar el perímetro de terreno que se muestra en plano, donde P = 10[m]



2. Beatriz entrega fruta por cajas a dos puestos al primero entrega tres cajas y media de durazno, cuatro cajas de melón, tres cajas de naranja, cinco cajas de uva, cinco cajas de palta y dos cajas de chirimoya. Al segundo puesto se entrega dos cajas de durazno, tres cajas y media de melón, cuatro cajas de naranja, tres cajas de uva, seis cajas de palta y cinco cajas de chirimoya.

   Determinar la cantidad total de cajas por cada producto.

Vamos a la producción

1. Haciendo un análisis del estudio de las aplicaciones algebraicas, ¿de qué manera apoyan en la vida diaria?

....

....

2. Describir en qué actividades específicas de nuestra vida diaria en las comunidades se utiliza el álgebra.

....

....

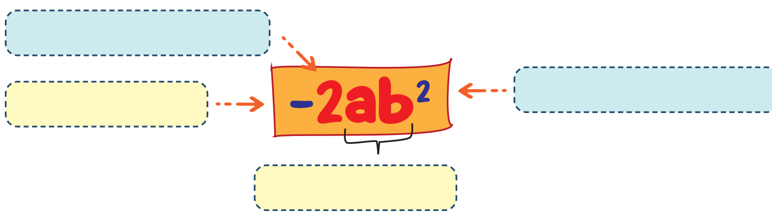
3. ¿Qué dificultades se han tenido durante el desarrollo de las actividades?

....

....

Preguntas de desarrollo:

Si las partes de un monomio son: variables o letras, signo, coeficiente numérico, exponentes; entonces coloca en los recuadros los nombres correspondientes a cada componente.



Seleccionemos la respuesta correcta:

Para que dos o más términos sean semejantes tienen que tener las:

a) Sus variables y exponentes iguales.

b) Sus coeficientes numéricos iguales.

c) Sus signos iguales.

Una expresión algebraica está representada por:

a) Por dos números enteros   b) Varios términos   c) Por exponentes   d) Ninguno

Un monomio es una expresión algebraica que consta de un solo término.

F   **V**

Se llama grado de un término algebraico a la suma de los exponentes de los coeficientes numéricos.

F   **V**

Preguntas de desarrollo:

Ordenamos el polinomio de forma creciente.

$$-4a - 5a^3b^2 - 3a^4b^3 + 23a^2b - 1$$

Unidad temática N.º 2

Operaciones algebraicas

Partamos de nuestra experiencia

Al igual que en aritmética, el álgebra nos permite realizar operaciones básicas de suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación. Así, por ejemplo, la señora Miranda se dedica a la venta de jugos en el mercado central de Tarija. Cierto día, por la mañana, compró 30 manzanas (m), 40 bananas (b), 15 papayas (p). Por la tarde, compraron 15 manzanas (m), 45 bananas (b), 8 papayas (p) y 20 kiwis (k). Calculando el resultado, sumamos las frutas que son iguales.

$$\begin{array}{ll} \text{por la mañana} & \mathbf{30m + 40b + 15p} \\ \text{por la tarde} & \underline{\mathbf{15m + 45b + 8p + 20k}} \\ & \mathbf{45m + 85b + 23p + 20k} \end{array}$$

En total la señora Miranda compró 45 manzanas,85 bananas, 23 papayas y 20 kiwis.

Veamos otro ejemplo:

Don Carlos cosechó de su huerto de nogal durante seis días las siguientes cantidades de nueces: primer día 500, segundo día 430, tercer día 820, cuarto día 509, quinto día 350, sexto día 250 nueces.

Suma algebraica: sumamos lo recolectado por días.

$\mathbf{500n + 430n + 820n + 510n + 350n + 250n = 2860n}$

Todos los términos de esta suma son semejantes porque tienen la misma parte literal (n). Entonces se suman los coeficientes y el resultado lleva la misma parte literal.

Por lo tanto, don Carlos recolectó 2860 nueces en 6 días.

Profundicemos nuestros saberes y conocimientos

Operaciones con polinomios

- **Suma de polinomios**

La suma de polinomios es una operación cuyo objetivo es reunir dos o más expresiones algebraicas.

Ejemplos:

Sumar: $\mathbf{a^2 + 3ab - 4b^2;\ 5a^2 + ab + 3b^2 - 3}$

1° ordenamos el polinomio.
2° escribimos uno debajo del otro.
3° reducimos términos semejantes.

$$\begin{array}{rrrr} a^2 & +3ab & -4b^2 & \\ 5a^2 & +ab & +3b^2 & -3 \\ \hline 6a^2 & +4ab & -b^2 & -3 \end{array}$$

Solución: $\mathbf{6a^2 + 4ab - b^2 - 3}$

Sumar: $\mathbf{3a + 5b - 2c;\ -4b - 5;\ -a - 7b + 6c + 1}$

$$\begin{array}{rrrr} 3a & +5b & -2c & \\ -a & -7b & +6c & +1 \\ & -4b & & -5 \\ \hline 2a & -6b & +4c & -4 \end{array}$$

Solución: $\mathbf{2a - 6b + 4c - 4}$

Sumar: $x^2 + \frac{1}{2}xy;\ -\frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}y^2;\ -\frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}y^2$

ordenamos y reducimos términos semejantes:

$$\begin{array}{rrr} x^2 & +\frac{1}{2}xy & \\ & -\frac{1}{4}xy & +\frac{1}{2}y^2 \\ & -\frac{1}{4}xy & -\frac{1}{5}y^2 \\ \hline x^2 & & +\frac{3}{10}y^2 \end{array}$$

Operaciones auxiliares

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2-1-1}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{5-2}{10} = \frac{3}{10}$$

Solución: $\mathbf{x^2 + \frac{3}{10}y^2}$

ACTIVIDAD. Resolvamos la suma de los siguientes polinomios en el cuaderno de ejercicios:

- **Resta o sustracción de polinomios**

Es una operación que tiene por objeto, hallar la resta o diferencia. Se escribe el minuendo con sus propios signos y a continuación el sustraendo con los signos cambiados y se reducen los términos semejantes.
Tomando en cuenta el ejemplo anterior de la cosecha de nueces, Don Carlos lleva al mercado las nueces y vende 2697 nueces, ¿Cuántas nueces le quedan?
Para solucionar el problema realizamos una resta algebraica. Entonces, del total de lo cosechado restamos la cantidad que vendió.

$$2860n - 2697n = 163n$$

Por lo tanto, después de la venta de don Carlos le quedaron 163 nueces.

Aprendamos juntos a resolver resta de polinomios.

EJEMPLOS.

1) De: **$4x - 3y + z$ restar: $2x + 5z - 6$**

El polinomio de minuendo son sus propios signos.
El sustraendo con os signos cambiados
Reducimos términos semejantes.

$$\begin{array}{rrrr} 4x & -3y & +z & \\ -2x & & -5z & +6 \\ \hline 2x & -3y & -4z & +6 \end{array}$$

Solución: **$2x - 3y - 4z + 6$.**

2) De: $y^5 - 9y^3 + 6y^2 - 31$ restar: $-11y^4 + 31y^3 - 8y^2 - 19y$.

$$\begin{array}{rrrrrr} y^5 & & -9y^3 & +6y^2 & & -31 \\ & -11y^4 & -31y^3 & +8y^2 & -19y & \\ \hline y^5 & -11y^4 & -40y^3 & +14y^2 & -19y & -31 \end{array}$$

Solución: $y^5 - 11y^4 - 40y^3 + 14y^2 - 19y - 31$

3) De: $\frac{1}{2}a + \frac{3}{5}b - \frac{7}{8}c + \frac{8}{9}d$ restar: $-\frac{7}{20}b + \frac{1}{8}c - \frac{1}{9}d + \frac{7}{8}$

Ordenando el polinomio:

$$
\begin{array}{llllll}
\frac{1}{2}a & +\frac{3}{5} & -\frac{7}{8} & +\frac{8}{9} & & \\
 & +\frac{7}{20}b & +\frac{1}{8}c & +\frac{1}{9}d & -\frac{7}{8} & \\
\hline
\frac{1}{2}a & +\left(\frac{3}{5}+\frac{7}{20}\right)b & -\frac{8}{8}c & +\frac{9}{9}d & -\frac{7}{8} & \\
\frac{1}{2}a & +\left(\frac{3}{5}+\frac{7}{20}\right)b & -\frac{\cancel{8}}{\cancel{8}}c & +\frac{\cancel{9}}{\cancel{9}}d & -\frac{7}{8} &
\end{array}
$$

Solución: $\frac{1}{2}a + \frac{19}{20}b - c + d - \frac{7}{8}$

ACTIVIDAD. Restemos los siguientes polinomios en el cuaderno de prácticas:

De:

1) $5p^3 + 6p^2q - 7pq^2 + 4q^3$ restar: $2p^3 - 3p^2q - 9pq^2 - q^3$

2) $a^3 + a^2 - a + \frac{5}{6}$ restar: $-\frac{7}{8}a^2 + \frac{9}{10}a + \frac{7}{8}$

3) $\frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{6}xy - \frac{1}{10}y^2$ restar: $-\frac{3}{5}x^2 + 2y^2 - \frac{3}{10}xy$

A) multiplicación de polinomios

Ley de Signos	→	En multiplicación signos iguales dan positivo, signos distintos dan negativo.
Ley de Exponentes	→	En multiplicación algebraica potencias de la misma base, se copia la misma base y se suman los exponentes. Así: $\mathbf{a^3 \times a^2 = a^5}$
Ley de Coeficientes	→	Se multiplican coeficientes entre coeficientes. Así: $\mathbf{3a \times 4a = 12a^2}$

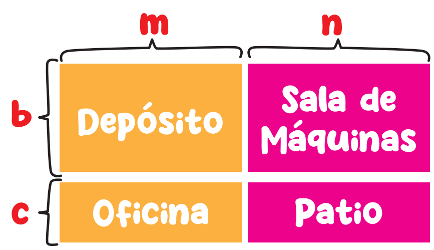
Saber multiplicar monomios y polinomios te ayudara a resolver problemas de traducción simple como hallar el área de un terreno sin conocer la medida de sus lados.

El producto de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene al multiplicar los términos de un polinomio por cada uno de los términos del otro polinomio, para ello se aplica la propiedad distributiva.

Aprendamos juntos a resolver multiplicación de polinomios.

EJEMPLOS.

1) El taller de Diego está distribuido como se muestra en la figura. ¿Qué expresión algebraica representa el área total del taller?



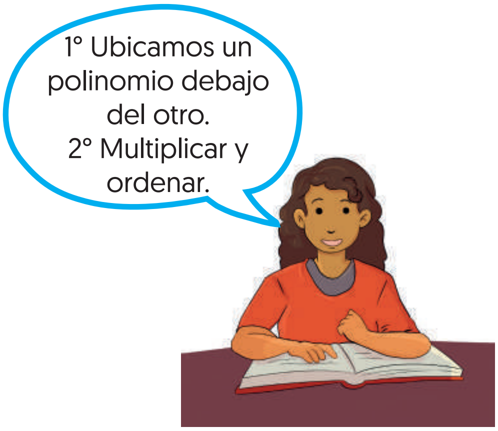
Solución: aplicaremos la fórmula del área de un rectángulo (base por su altura) y las medidas son **(a +b) y (m + n)**

$$(a + b)\ y\ (m + n) = am + an + bm + bn$$

2) Multiplicar: $m^3 - 4m + m^2 - 1$ por $m^3 + 1$

$$\begin{array}{r}
m^3 + m^2 - 4m - 1 \\
\times \qquad\qquad m^3 + 1 \\
\hline
m^3 + m^2 - 4m - 1 \\
m^6 + m^5 - 4m^4 - \cancel{m^3} \qquad\qquad\qquad \\
\hline
m^6 + m^5 - 4m^4 \cancel{-\ m^3} + m^2 - 4m - 1
\end{array}$$

Solución: $m^6 + m^5 - 4m^4 + m^2 - 4m - 1$

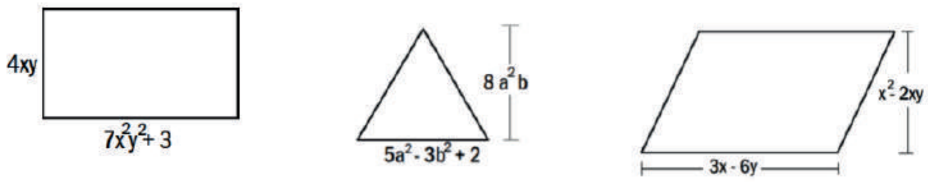


3) Multiplicar:

$$\frac{1}{4}a^2 - ab + \frac{2}{3}b^2 \text{ por } \frac{1}{4}a - \frac{3}{2}b$$

$$\begin{array}{r}
\frac{1}{4}a^2 - ab + \frac{2}{3}b^2 \\
\frac{1}{4}a - \frac{3}{2}b \\
\hline
-\frac{3}{8}a^2b + \frac{3}{2}ab^2 - \frac{6}{6}b^3 \\
\frac{1}{16}a^3 - \frac{1}{4}a^2b + \frac{2}{12}ab^2 \qquad\quad \\
\hline
\frac{1}{16}a^3 + \frac{5}{8}a^2b + \frac{5}{3}ab^2 - b^3
\end{array}$$

ACTIVIDAD. Expresar algebraicamente el área de los siguientes polígonos:



B) División de polinomios

Ley de Signos	→	En división al igual que en multiplicación signos iguales dan positivo, signos distintos dan negativo.
Ley de Exponentes	→	Para dividir potencias de la misma base, se copia la base y los exponentes se restan. Así: $a^5 \div a^2 = a^3$
Ley de Coeficientes	→	Se dividen coeficientes entre coeficientes. **Así:** $20a^5 \div 5a^2 = 4a^3$

- División de polinomios entre monomio.

  Para la división de polinomio entre monomio, se divide cada término del polinomio entre el monomio.

Aprendamos juntos a resolver división de polinomios

Dividir: $6m^3 - 8m^2n + 20mn^2$ entre $-2m$

$$\frac{6m^3}{-2m} - \frac{8m^2n}{-2m} + \frac{20mn^2}{-2m} = -3m^2 + 4mn - 10n^2$$

Solución: $-3m^2 + 4mn - 10n$

En división de fracciones los coeficientes se multiplican extremos con extremos y medio con medio.
Al resultado final se simplifica si es posible.

Dividir:

$$\frac{1}{3}a^3 - \frac{3}{5}a^2 + \frac{1}{4}a \quad \text{entre} \quad -\frac{3}{5}$$

$$\frac{\frac{1}{3}a^3}{-\frac{3}{5}} \; \frac{-\cancel{\frac{3}{5}}a^2}{-\cancel{\frac{3}{5}}} \; \frac{+\frac{1}{4}a}{-\frac{3}{5}} = -\frac{5}{9}a^3 + \frac{15}{15}a^2 - \frac{5}{12}a$$

$$= -\frac{5}{9}a^3 + a^2 - \frac{5}{12}a$$

Solución: $= -\frac{5}{9}a^3 + a^2 - \frac{5}{12}a$

- División de dos polinomios

La división de polinomios se realiza de la siguiente forma:

1° Se ordena el dividendo y el divisor con relación a una misma letra de todo el polinomio.
2° Se divide el primer término del dividendo entre el primero del divisor y se obtiene el primer término del cociente.
3° El término del cociente se multiplica por todo el divisor y el producto se resta del dividendo, para lo cual se cambia el signo, escribiendo cada término debajo de su semejante.

Ejemplos:

1) Dividir: $\mathbf{3x^2 + 2x - 8}$ **entre** $\mathbf{x + 2}$

$$
\begin{array}{rrr|l}
x^2 & +2x & -8 & x-2 \\ \cline{4-4}
-3x^2 & -6x & \downarrow & 3x \\ \cline{1-2}
 & -4x & -8 &
\end{array}
$$

Multiplicamos el primer término del cociente por el divisor, al producto cambiamos de signo y anotamos debajo de su semejante.

Continuando con el ejemplo:

$$
\begin{array}{rrr|l}
3x^2 & +2x & -8 & x-2 \\ \cline{4-4}
-3x^2 & -6x & \downarrow & 3x-4 \\ \cline{1-2}
 & -4x & -8 & \\
 & -4x & +8 & \\ \cline{2-3}
 & & (0) &
\end{array}
$$

Solución: 3x – 4

1) Dividir: $\mathbf{a^5 - a^4 + 10 - 27a + 7a^2}$ entre: $\mathbf{a^2 + 5 - a}$

Ordenamos los términos tanto en dividendo como divisor:

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
\cancel{a^5} & -\cancel{a^4} & & +7a^2 & -27a & +10 & a^2-a+5 \\ \cline{7-7}
-\cancel{a^5} & +\cancel{a^4} & -5a^3 & & & & a^3-5a+2 \\ \cline{1-3}
 & & -5a^3 & +7a^2 & -27a & & \\
 & & 5a^3 & -5a^2 & +25a & & \\ \cline{3-5}
 & & & \cancel{2a^2} & -2a & +10 & \\
 & & & -\cancel{2a^2} & +2a & -10 & \\ \cline{4-6}
 & & & & (0) & &
\end{array}
$$

No olvides cambiar de signos al producto y anotar debajo del término semejante.

Solución: a³ - 5a + 2

ACTIVIDAD. Desarrollemos las siguientes divisiones en el cuaderno de ejercicios:

1) $\mathbf{3a^3 - 5ab^2 - 6a^2b^3}$ entre: $\mathbf{-2a}$

2) $\mathbf{-15x^2 - 8y^2 + 22xy}$ entre: $\mathbf{2y - 3x}$

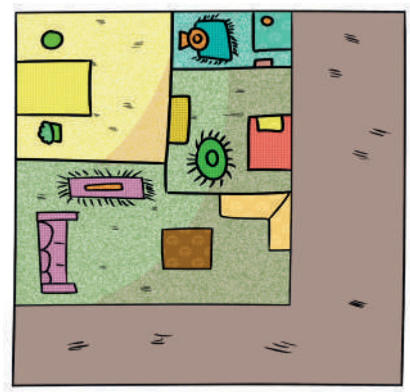
3) $\mathbf{6x^2 - xy - 2y^2}$ entre: $\mathbf{y + 2x}$

4) $\mathbf{5a^2 + 8ab - 21b^2}$ entre: $\mathbf{a + 3b}$

Productos notables

Los productos notables son útiles para simplificar algunas multiplicaciones con polinomios; su aplicación sirve para realizar cálculos complejos con números grandes de forma simplificada.

Si tenemos un terreno rectangular donde se construye una vivienda, como se muestra en el gráfico, y observamos el plano de la vivienda, ¿cómo se podría calcular el área de la parte sombreada?



Si, el área de todo el terreno rectangular es:	$(m + n)(m + n)$ $= m^2 + 2mn + n^2$
Si se quiere calcular el área sombreada, entonces restamos el área del terreno que ocupa la construcción.	área de la contruccion $m \times m = m^2$
Sí restamos al área total el área de construcción tendremos:	$m^2 + 2mn + n^2$ $- m2$ $2mn + n^2$

Solución: el área sombreada es: $\mathbf{2mn + n^2}$

Los productos notables son polinomios que se obtienen al multiplicar dos o más polinomios que poseen características especiales. Estos productos cumplen ciertas reglas, por lo que su resultado puede ser hallado por simple inspección sin necesidad de efectuar la multiplicación.

Cuadrado de la suma de dos términos, es igual a al cuadrado del primer término, más el doble producto del primer término por eso segundo, más el cuadrado del segundo término.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Si desarrollamos el binomio: $(a + b)2 = (a + b)(a + b)$

Desapareciendo los paréntesis $= a^2 + ab + ab + b^2$

Reduciendo términos semejantes $= (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

ACTIVIDAD. Desarrollemos las siguientes divisiones en el cuaderno de ejercicios:

Ejemplos:

a) $(5x + y)^2$

$= (5x)^2 + 2(5x)(y) + (y)^2$

$= 25x^2 + 10xy + y^2$

b) $\left(\frac{2}{5}x^2 + y^3\right)^2 = \left(\frac{2}{5}x^2\right)^2 + 2\left(\frac{2}{5}x^2\right)(y^3) + (y^3)^2$

$= \frac{4}{25}x^4 + \frac{4}{5}x^2y^3 + y^6$

b) **Cuadrado de la diferencia de dos términos,** es igual al cuadrado del primer término, menos el doble producto del primer término por eso segundo, más el cuadrado del segundo término.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Resolver:

- $(2x-3)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(3) + (3)^2$

  $= 4x^2 - 12x + 9$

- $\left(\frac{3}{4}a^3 - \frac{1}{2}ab^2\right)^2 = \left(\frac{3}{4}a^3\right)^2 - 2 \bullet \left(\frac{3}{4}a^3\right) \bullet \left(\frac{1}{2}ab^2\right) + \left(\frac{1}{2}ab^2\right)^2$

  $= \frac{9}{16}a^6 - \frac{3}{4}a^4b^2 + \frac{1}{4}a^2b^4$

c) **Suma por a diferencia de dos términos,** es igual a la diferencia de los cuadrados de dichos términos.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Ejemplos:

$(2a + 3b)(2a - 3b) = (2a)^2 - (3b)^2 = 4a^2 - 9b^2$

$\left(x - \frac{1}{11}\right)\left(x + \frac{1}{11}\right) = x^2 - \frac{1}{121}$

d) **Producto de dos binomios con un término en común,** es igual al cuadrado del primer término en común, más el producto de la suma de los términos no comunes por el término común, más el producto de los términos no comunes.

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

Resolver:

a) $(x + 5)(x - 2) =$

El cuadrado del primer término en común...	→	**x^2**
El producto de la suma de los términos no comunes por el término común...	→	**$(+5) + (-2) = +3x$**
El producto de los términos no comunes...	→	**$(+5) \times (-2) = -10$**

Solución: $(x + 5)(x - 2) = x^2 + 3x - 10$

b) $(x^2 - 1)(x^2 - 7) = (x^2)^2 + [(-1) + (-7)]x + (-1)(-7)$

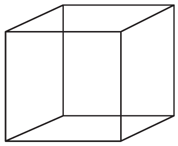
$= x^4 - 8x + 7$

d) **Cubo de la suma de dos términos,** es igual al cubo del primer término, más el triple del cuadrado del primer término por el segundo, más el triple del primer término por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo término.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

EJEMPLOS.

Calcular la expresión algebraica que corresponde al volumen del cubo que se muestra en la figura.



3x + 2

Resolvemos aplicando productos notables: **$V = (3x + 2)^3$**

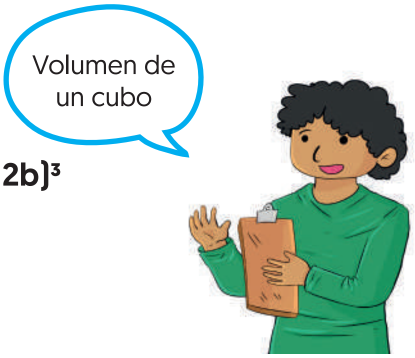
Desarrollo: **$V = (3x)^3 + 3(3x)^2 (2) + 3(3x)(2)^2 + (2)^3$**

Solución: **$V = 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8$**

Calcular:

$$\left(\frac{1}{2}a + 2b\right)^3 = \left(\frac{1}{2}a\right)^3 + 2\left(\frac{1}{2}a\right)^2(2b) + 2\left(\frac{1}{2}a\right)(2b)^2 + (2b)^3$$

$$= \frac{1}{8}a^3 + a^2b + 4ab^2 + 8b^3$$



e) **Cubo de la diferencia de dos términos,** es igual al cubo del primer término, menos el triple del cuadrado del primer término por el segundo, más el triple del primer término por el cuadrado del segundo, menos el cubo del segundo término.

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

EJEMPLOS.

- $(3m^2 - 5n)^3 = (3m^2)^3 - 3(3m^2)^2\,(5n) + 3(3m^2)\,(5n)^2 - (5n)^3$

  $=27m^6 - 135m^4n + 225m^2n^2 - 125n^3$

- $\left(\frac{1}{3}x + 2y\right)^3 = \left(\frac{1}{3}x\right)^3 + 2\left(\frac{1}{3}x\right)^2 (2y) + 2\left(\frac{1}{3}x\right)(2y)^2 + (2y)^3$

  $= \frac{1}{27}x^3 + \frac{4}{9}x^2y + \frac{8}{3}xy^2 + 8y^3$

Teorema del Binomio de Newton

El binomio de Newton expresa la enésima potencia de un binomio $(a + b)^n$. Si el binomio $(a + b)$ se multiplica sucesivamente por sí mismo se obtiene las siguientes potencias:

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a+b)^2 = \underbrace{(a + b)\,(a + b)}_{\text{2 veces}} = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = \underbrace{(a + b)\,(a + b)\,(a + b)}_{\text{3 veces}} = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a+b)^4 = \underbrace{(a + b)...(a + b)}_{\text{4 veces}} = a^4 + 4a^3b + 6a^2\,b^2 + 4ab^3 + b^4a^9 + 5a^4$$

$$(a+b)^5 = \underbrace{(a + b)...(a + b)}_{\text{5 veces}} = a^9 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2\,b3 + 5ab^4 + b^5$$

De los desarrollos anteriores, se observa que:

- El desarrollo de $(a + b)^n$ tiene $n + 1$ términos.
- El exponente de a empieza con n en el primer término y va disminuyendo en uno con cada término, hasta cero en el último.
- El exponente de b empieza con cero en el primer término y va aumentando en uno con cada término, hasta n en terminos.
- Para cada término la suma de los exponentes de a y b es n.

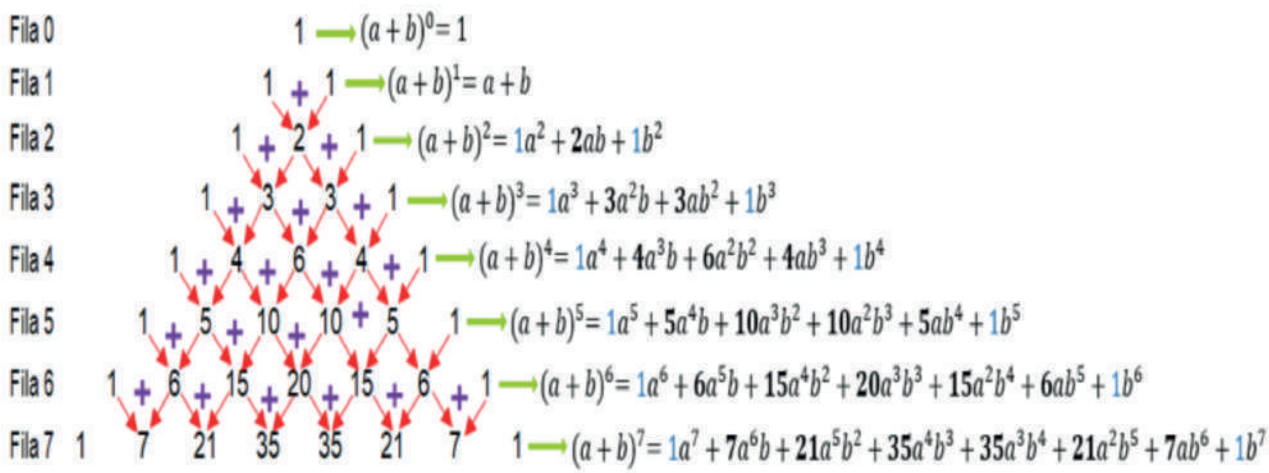
- El coeficiente del primer término es uno y el del segundo es n.
- El coeficiente de un término cualquiera es igual al producto del coeficiente del término anterior por el exponente de a dividido entre el número que indica el orden de ese término.

Los términos que equidistan de los extremos tienen coeficientes iguales.

Triángulo de Pascal

El triángulo de Pascal es un esquema que tiene como característica que cada uno de los componentes de sus filas representa los coeficientes del desarrollo de binomios.

Se construye gráficamente de la siguiente forma:



Con la asistencia de nuestro facilitador/a, generamos los siguientes binomios utilizando la estructura del Triángulo de Pascal.

$$(x^2 + 2y^3)^4 = (x2)^4 + 4(x^2)^3(2y) + 6(x^2)^2(2y)^2 + 4(x^2)(2y)^3 + (2y)^4$$

$$= x^8 + 8x^6y + 24x^4y^2 + 32x^2y^3 + 8y^4$$

$$\left(\frac{1}{2}a - 3\right)^5 =$$

$$= \left(\frac{1}{2}a\right)^5 - 5\left(\frac{1}{2}a\right)^4(3) + 10\left(\frac{1}{2}a\right)^3(3)^2 - 10\left(\frac{1}{2}a\right)^2(3)^3 + 5\left(\frac{1}{2}a\right)(3)^4 - (3)^5$$

$$= \frac{1}{2}a^5 - \frac{15}{16}a^4 + \frac{45}{4}a^3 - \frac{135}{2}a^2 + \frac{405}{2}a - 243$$

Cocientes notables

Los cocientes notables son aquellos que se obtienen en ciertos casos de división exacta entre polinomios. El desarrollo se puede expresar sin efectuar la división.

CONDICION	CASOS	DESARROLLO DEL COCIENTE NOTABLE
“n” es par o impar	$\frac{x^n - y^n}{x - y}$	$= {}^{(n-1)}y^0 + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + x^{n-4}y^3 + \ldots + x^0y^{n-1}$
“n” es par	$\frac{x^n - y^n}{x + y}$	$= x^{n-1}y^0 - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - x^{n-4}y^3 + \ldots - x^0y^{n-1}$
“n” es impar	$\frac{x^n + y^n}{x + y}$	$= x^{n-1}y^0 - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - x^{n-4}y^3 + \ldots + x^0y^{n-1}$
	$\frac{x^n + y^n}{x - y}$	No es cociente notable

ACTIVIDAD. Desarrollemos las siguientes divisiones en el cuaderno de ejercicios:

Ejemplos.

En el ejemplo 3, los signos del desarrollo son alternadamente positivos y negativos, empezando en positivo. Cuando “n” es impar.

1) $\frac{x^5 - a^5}{x - a} = x^4 + x^3a + x^2a^2 + xa^3 + a^4$

2) $\frac{64a^6 - 729b^6}{2a + 3b} = \frac{(2a)^6 - (3b)^6}{2a + 3b}$

$= (2a)^5 - (2a)^4(3b) + (2a)^3(3b)^2 - (2a)^2(3b)^3 + (2a)(3b)^4 - (3b)^5$

$= 32a^5 - 48a^4b + 72a^3b^2 - 108a^2b^3 + 162ab^4 - 243a^5$

2) $\frac{x^5 + 243y^5}{x + 3y} = \frac{x^5 + (3y)^5}{x + 3y}$

$= (x)^4 - (x)^3(3y) + (x)^2(3y)^2 - (x)(3y)^3 + (3y)^4$

$= x^4 - 3x^3y + 9x^2y^2 - 27xy^3 + 81y^4$

ACTIVIDAD. Desarrollar los siguientes cocientes notables en el cuaderno de ejercicios.

1) $\frac{x^3 + 216}{x + 6} =$

2) $\frac{x^{18} - y^{18}}{x^3 - y^3} =$

3) $\frac{64m^6 - 729n^6}{2m + 3n} =$

4) $\frac{x^{6n} + y^{3n+3}}{x^{2n} + y^{n+1}} =$

5) $\frac{16x^4 - 81y^4}{2x + 3y} =$

6) $\frac{256x^4 - y^{12}}{4x + y^3} =$

Valoramos nuestros conocimientos adquiridos

Reflexionamos acerca de la importancia de conocer operaciones algebraicas y su aplicación en la vida diaria, posteriormente plasmamos los conceptos más relevantes en un mapa conceptual.

Vamos a la producción

Analiza y responde.

¿Cuáles fueron las dificultades que tuvimos en la aplicación de los productos notables? ¿Por qué?

....

....

....

¿Qué partes de la resolución de ejercicios nos demandaron más tiempo?

....

....

Para consolidar nuestros conocimientos, procedamos a escanear el código QR que nos dará acceso a la evaluación de contenido y, a continuación, comprobaremos nuestras respuestas correctas.

https://cutt.ly/p5gOz9X

Unidad temática N.º 3

Potenciación y radicación

Partamos de nuestra experiencia

En la comunidad Tierra Santa perteneciente a San Borja - Beni de Bolivia, existen 4 familias que crían Ganado, cada familia tiene 4 vacas. ¿Cuántas patas de vacas hay en total en las cuatro familias?
Nº de familias 4
Nº de vacas por familia 4
Nº de patas por vaca 4
Entonces 43 = 4 x 4 x 4 = 64
De esta manera aplicamos la potenciación en nuestro diario vivir.

ACTIVIDAD. Analiza y responde.

Observando este ejemplo ¿De qué manera has podido aplicar la potenciación en tu día a día?

....

....

....

Profundicemos nuestros saberes y conocimientos

¿Qué es potenciación?

La potenciación es una abreviación de la multiplicación, que consiste en multiplicar por sí mismo un número llamado base, tantas veces como lo indique otro número que se llama exponente.

Si la base es negatica entonces se tiene:

- **Base negatica esponente par**

$$(-a)^{par} = +a$$

- **Base negatica esponente par**

$$(-a)^{impar} = -a$$

Partes de una potencia:

Exponente

$$3^{4} = 81$$ Potencia

Base

Ejemplo 1: **$(-5)^4 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = 625$**

Ejemplo 2: **$(-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5) = -125$**

Ejemplo 3: **$(-6)^5 = (-6) \times (-6) \times (-6) \times (-6) \times (-6) = -7776$**

Ejemplo 4: **$\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) = \left(-\frac{8}{125}\right)$**

Ejemplo 5: **$(-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4) = (-4)^5 = 1024$**

LEY DE SIGNOS

+ POR + = +

– POR – = +

– POR + = –

+ POR – = –

Nº	PROPIEDAD	FÓRMULA	EXPLICACIÓN
1	Productos de potencia de la misma base.	$a^n \times a^m = a^{n+m}$	Bases iguales se suman los exponentes.
2	Cociente de potencias de la misma base.	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	Bases iguales se restan los exponentes
3	Potencia de otra potencia	$(a^n)^m = a^{nxm}$	La potencia de potencia de una base se multiplica sus exponentes.
4	Potencia de un producto.	$(a \bullet b)^n = a^n \bullet b^n$	Exponente de bases diferentes quedan implicadas por el mismo exponente.
5	Potencia de un cociente	$\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a^n}{b^n}$	El exponente de un cociente fraccionario implica al numerador y al denominador.
6	Exponente cero.	$a^0 = 1$	Todo número elevado a cero es 1.
7	Exponente negativo	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	El exponente es negativo es igual a la inversa fraccionaria, donde la base se convierte en denominador y el exponente en positivo.
8	Exponente fraccionario	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	Las potencias con exponente fraccionario son iguales a una raíz.

PROPIEDAD 1: Productos de potencia de la misma base.

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

1. $3^2 \times 3^4 = 3^{2+4} = 3^6 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 729$
2. $2 \times 2^3 \times 2^2 = 2^{1+3+2} = 2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$
3. $x \bullet x^3 \bullet x^2 = x^{1+3+2} = x^6$
4. $x \bullet y \bullet x^2 \bullet y^3 = x^{1+2}\, y^{1+3} = x^3\, y^4$
5. $x^2 \bullet y^x \bullet z^2 \bullet y^2 \bullet z = x^2\, y^{x+2}\, z^{2+1} = x^2\, y^{x+2}\, z^3$

PROPIEDAD 2: Cociente de potencias de la misma base.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n+m}$$

1. $\frac{2^2}{2} = 2^{2-1} = 2^1 = 2$
2. $\frac{3^4}{3} = 3^{4-1} = 3^3 = 3 \bullet 3 \bullet 3 = 27$
3. $\frac{2^{4x}}{2^{2x}} = 2^{4x-2x} = 2^{2x}$
4. $\frac{x^5}{x^2} = x^{5-2} = x^3$
5. $\frac{y^2}{y^5} = y^{2-5} = y^{-3} = \frac{1}{y^3}$

PROPIEDAD 3: Potencia de otra potencia

$(a^n)^m = a^{n \bullet m}$

1. $(2^3)^2 = 2^{3 \bullet 2} = 2^6 = 64$
2. $(x4)^2 = x^{4 \bullet 2} = x^8$
3. $(y3)^4 = y^{3 \bullet 4} = y^{12}$

PROPIEDAD 4: Potencia de un producto.

$(a \bullet b)^n = a^n \bullet b^n$

1. $(x \bullet y)^2 = x^2 \bullet y^2$
2. $(xyz)^3 = x^3 \bullet y^3 \bullet z^3$
3. $(24xy)^4 = 24^4 \bullet x^4 \bullet y^4$

PROPIEDAD 5: Potencia de un cociente

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

1. $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$
2. $\left(\frac{2x}{2^2}\right)^2 = \frac{2^2\, x^2}{(2^2)^2} = \frac{4x^2}{2^4} = \frac{4x^2}{16}$
3.

PROPIEDAD 6: Exponente cero.

$a^0 = 1$

1. $x^0 = 1$
2. $234^0 = 1$
3. $(2xyz)^0 = 1$

PROPIEDAD 7: Exponente negativo.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

1. $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$
2. $\left(\frac{x}{y}\right)^{-3} = \frac{y^3}{x^3}$
3. $-x^{-4} = -\frac{1}{x^4}$

PROPIEDAD 8: Exponente Fraccionario.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

1. $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$
2. $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$
3. $\sqrt[3]{(x^2\, y^3)^5} = \sqrt[3]{x^{2 \bullet 5}\, y^{3 \bullet 5}} = \sqrt[3]{x^{10}\, y^{15}} = x^{\frac{10}{3}}\, y^{\frac{15}{3}} = x^{\frac{10}{3}}\, y^5$

¿Qué es radicación?

El concepto de radical se utiliza para denominar la operación, de extraer raíces de un número; los radicales o raíces.

Definición:

La raíz enésima de un número "a" es igual a "b", si y solo si "b" elevado a la "n" es "a"

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

Partes de la raíz:

Índice → a
Radical → $\sqrt{\ }$

$$\sqrt[a]{b} = c$$

Radicando ← b c → Raíz

Ejemplos:

1. $\sqrt{16} = 4 \leftrightarrow 4^2 = 16$
2. $\sqrt{144} = 12 \leftrightarrow 12^2 = 144$
3. $\sqrt[3]{64} = 4 \leftrightarrow 4^2 = 16$

Actividad: Realicemos los siguientes ejercicios en nuestros cuadernos de prácticas.

1. $\sqrt[3]{125} =$
2. $\sqrt{81} =$
3. $\sqrt[4]{16} =$

N°	PROPIEDAD	EJEMPLO
1.	$\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$ $\sqrt[n]{a^n} = a$	1. $\sqrt[3]{x3} = x$ 2. $\sqrt{2^2} = 2$ 3. $\sqrt[5]{(x-y)^5} = (x-y)$
2.	$\sqrt[n]{a \bullet b} = \sqrt[n]{a} \bullet \sqrt[n]{b}$	1. $\sqrt[3]{x \bullet y} = \sqrt[3]{x} \bullet \sqrt[3]{y}$ 2. $\sqrt{16x^2\ y^3} = \sqrt{16}\sqrt{x^2}\sqrt{y^3} = 4x\sqrt{y^3}$
3.	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	1. $\sqrt[n]{\frac{512x^4}{64}} = \sqrt[n]{\frac{512x^4}{\sqrt[3]{64}}} = \frac{\sqrt[3]{512^3}\ \sqrt[3]{x^4}}{4} = \frac{8x^3\sqrt{x}}{4} = 2x^3\sqrt{x}$
4	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \bullet m]{a}$	1. $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[3 \bullet 2]{2}$ 2. $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{xy}}}} = \sqrt[3 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 3]{xy} = \sqrt[36]{xy}$
5	$\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$	1. $2\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{2^3x} = \sqrt[3]{8x}$

Ejemplos:

1. $\sqrt[5]{4} \bullet \sqrt[5]{(-4)} \bullet \sqrt[5]{-2} = \sqrt[5]{4 \bullet (-4) \bullet (-2)} = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

2. $\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{\frac{9}{2}}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5} = \sqrt[3]{6\cdot\frac{9}{2}}\cdot\sqrt{5\cdot 5} = \sqrt[3]{27}\cdot\sqrt{25} = 3\cdot 5 = 15$

Actividades: Con una línea, unimos la respuesta correcta:

1. $\sqrt{8x^3y^2} =$	A. $3\sqrt{3a}$
2. $\sqrt[3]{a^4b^6} =$	B. $6a^2b^3\sqrt{3ab}$
3. $\sqrt{\sqrt[6]{a^6b^{30}c^{18}}} =$	C. $y\sqrt{x}$
4. $\sqrt{108a^5b^7} =$	D. $b^2c^6\sqrt{ab^3c^3}$
5. $\dfrac{\sqrt{32x^6y^{10}}}{\sqrt{8x^2y^3}} =$	E. $2xy\sqrt{2x}$
6. $\sqrt{27a} =$	F. $5x^2y\sqrt{xy}$
7. $\sqrt{50x^5y^3} =$	G. $ab^2\sqrt[3]{a}$
8. $\dfrac{\sqrt{x^3y^5z}}{\sqrt{x^2y^3z}} =$	H. $2x^2y^3\sqrt{y}$

Operaciones con exponentes y radicación

Radicales semejantes, dos o más radicales son semejantes cuando tienen el mismo índice y el mismo subradical.

$$\underbrace{\sqrt[3]{7m} \quad 5\sqrt[3]{7m} \quad 7\sqrt[3]{7m}}_{\text{TÉRMINOS SEMEJANTES}}$$

1. $3\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 4\sqrt{x} \quad = \quad (3 + 2 - 3 + 4)\sqrt{x} = 6\sqrt{x}$

2. $5\sqrt{x} + 3\sqrt{y} + 2\sqrt{y} - 3\sqrt{x} \quad = \quad (5 - 3)\sqrt{x} + (3 + 2)\sqrt{y} = 2\sqrt{x} + 5\sqrt{y}$

3. $4\sqrt{12} + 5\sqrt{8} - \sqrt{50} - 7\sqrt{48} \quad = \quad 4\sqrt{(4 \bullet 3)} + 5\sqrt{(4 \bullet 2)} - \sqrt{(25 \bullet 2)} - 7\sqrt{(16 \bullet 3)}$

$= \quad 4\sqrt{(2^2 \bullet 3)} + 5\sqrt{(2^2 \bullet 2)} - \sqrt{(5^2 \bullet 2)} - 7\sqrt{(4^2 \bullet 3)}$

$= \quad (4 \bullet 2)\sqrt{3} + (5 \bullet 2)\sqrt{2} - 5\sqrt{2} - (7 \bullet 4)\sqrt{3}$

$= \quad 8\sqrt{3} + 10\sqrt{2} - 5\sqrt{2} - 28\sqrt{3}$

$= \quad 5\sqrt{2} - 20\sqrt{3}$

b) Multiplicación de radicales con el mismo índice:

Para multiplicar dos radicales, primero reducimos radicales al mismo índice en caso de que sea necesario, luego aplicamos la prpopiedad.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

1. $2 \bullet \sqrt{4} = \sqrt{2 \bullet 4} = \sqrt{8}$

2. $\sqrt[3]{2x} \bullet \sqrt[3]{4x} \bullet \sqrt[3]{3x} = \sqrt[3]{2x \bullet 4x \bullet 3x} = \sqrt[3]{24x^3} = x^3\sqrt{24}$

3. $\sqrt[3]{2}\,(1 + \sqrt[3]{3}) = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2 \bullet 3} = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{6}$

4. $\sqrt{2}\,(\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1) = \sqrt{(2 \bullet 2)} + \sqrt{(2 \bullet 3)} + \sqrt{2} = \sqrt{4} + \sqrt{6} + \sqrt{2}$

Para multiplicar dos radicales, primero reducimos radicales al mismo índice en caso de que sea necesario, luego aplicamos la prpopiedad.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{ab}}{\sqrt[n]{ab}}$$

Ejemplos:

1. $\sqrt{\dfrac{x^4}{2}} = \dfrac{\sqrt{x^4}}{\sqrt{2}} = \dfrac{x^2}{\sqrt{2}}$

2. $\sqrt[3]{\dfrac{512x^4}{64}} = \dfrac{\sqrt[3]{512x^4}}{\sqrt[3]{64}}$

APRENDIZAJES APLICADOS - MATEMÁTICA

$$= \frac{\sqrt[3]{512x^4}}{\sqrt[3]{64}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{512x^4}\sqrt[3]{x^4}}{4}$$

$$= \frac{8x\sqrt[3]{x}}{4}$$

$$= 2x\sqrt[3]{x}$$

3. $$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a + b}} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a + b}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a + b)(a - b)}{a + b}}$$

$$= \sqrt{a - b}$$

4. $$\sqrt[6]{\frac{4^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{(2^2)^2}{2^3}}$$

$$= \sqrt[6]{\frac{2^4}{2^3}}$$

$$= \sqrt[6]{2^{4-3}}$$

$$= \sqrt[6]{2}$$

Aplicamos la propiedad $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Aplicamos la propiedad: $\sqrt[n]{a \bullet b} = \sqrt[n]{a} \bullet \sqrt[n]{b}$

Raíz cubica de 512 es 8

8 ÷ 4 = 2

Aplicamos la propiedad: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Factorizando

Simplificando

Aplicamos la propiedad: $(a^n)^m = a^{n \bullet m}$

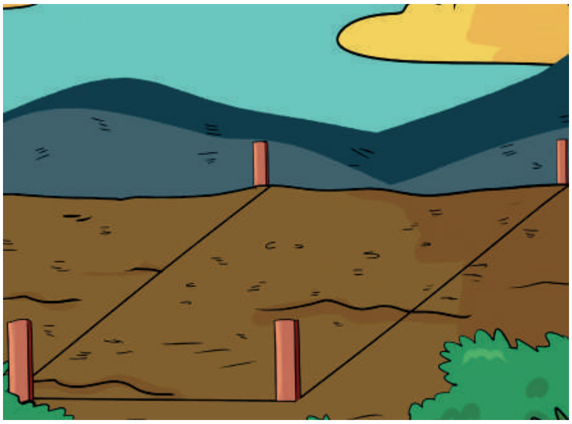
División de potencias

Actividad de multiplicación y división de radicales:

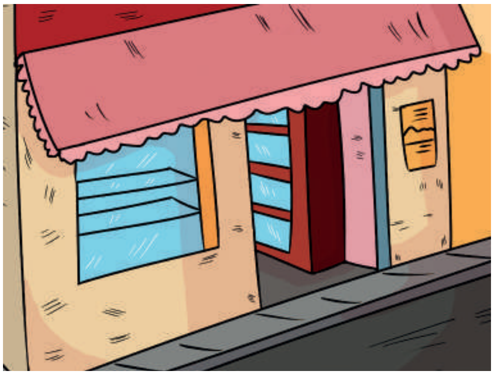
1. $\sqrt{3} \bullet \sqrt{5} =$
2. $\sqrt{2x} \bullet \sqrt{3xy} \bullet \sqrt{4y} =$
3. $\sqrt{3}(\sqrt{4} + \sqrt{2} + x) =$
4. $\sqrt[6]{\frac{64}{16}} =$
5. $\sqrt[6]{\frac{9^3}{3^4}} =$
6. $\frac{\sqrt[4]{a^2b^6}}{\sqrt[3]{a^2b^2}}$

Resolución de problemas

Problema 1: un terreno cuadrado tiene una superficie de $1296m^2$ y se quiere alambrar completamente el borde del terreno. ¿Cuántos metros de alambre se necesitan para alambrar el terreno?

SOLUCIÓN:	IMAGEN:
Datos: A = $1296m^2$ Reemplazamos en la fórmula del área: **$A = l^2$** **$l^2 = A$** **$l = \sqrt{A}$** **$l = \sqrt{192m^2}$** **l = 36m** Como el cuadrado tiene 4 lados entonces: **36 • 4 = 144m.** **Respuesta:** Se necesitan 144 metros de alambre para alambrar todo el terreno.	

Problema 2: una tienda tiene 16 metros de largo y 9 metros de ancho. Si se va construir otra tienda de forma cuadrada y con el mismo área. ¿Cuánto medirá cada lado?

SOLUCIÓN:	IMAGEN:
Datos: Tienda 1: $A = b \bullet h$ $A = 16m \bullet 9m$ $A = 144m^2$ Tienda 2: $A = l^2$ $l^2 = A$ $l = \sqrt{144m^2}$ l = 12m **Respuesta:** Cada lado medirá 12 metros.	

Actividad:

¿Cuál es la medida de cada lado de la pantalla de un monitor, si el área que tiene es de 441 plg^2?

Un terreno cuadrado tiene una superficie de 900 metros cuadrados. ¿Cuántos metros lineales de alambre se necesita para cercarlo todo?

Juan tiene 64 azulejos cuadrados. Quiere formar un mosaico con el mismo número de azulejos en cada lado. ¿Cuántos azulejos debe poner en cada fila?

Valoramos nuestros conocimientos adquiridos

1. ¿Qué utilidad tienen en nuestra vida las potencias y raíces? Mencionemos 4 ejemplos.

R.- ....

....

2. ¿Quél es lo más interesante que has aprendido del tema?

R.- ....

....

Vamos a la producción

1. Elaboremos un formulario de material reciclado del entorno, donde estén todas las propiedades de la potenciación y de la radicación.

2. Realicemos una maqueta del terreno donde vivimos e identifiquemos el área y la medida de los lados, utilizando las fórmulas que se usaron en la resolución de los problemas.

3. Escribamos dentro del paréntesis "V", si la proposición es verdadera, o "F" si es falsa:

a. $x^{2m} \bullet x^{3m} \bullet x^{m} = x^{6m}$ ( )

b. $x^{2a} \bullet x^{5} = x^{2a+5}$ ( )

c. $x^{5b} \div x^{3} = x^{5b+3}$ ( )

d. $x^{2a+3} = x^{3+a+a}$ ( )

e. $\frac{x^{10a}}{x^{3a}} + \frac{x^{8a}}{x^{a}} = 2x^{7a}$ ( )

Para consolidar nuestros conocimientos, procedamos a escanear el código QR que nos dará acceso a la evaluación de contenido y, a continuación, comprobaremos nuestras respuestas correctas.

https://forms.gle/yUq7VT5siqXME1Rq7

Unidad temática N.º 4

Factorización de Polinomios

Partamos de nuestra experiencia

Actividad: Observamos detenidamente las siguientes imágenes y buscamos los aspectos comunes.



¿Qué aspectos llegaste a considerar?

Mencionemos algún aspecto de nuestra vida cotidiana que podamos llegar a trabajar con la factorización.

Profundicemos nuestros saberes y conocimientos

Casos para factorizar expresiones algebraicas

CASO I	Factor común
CASO II	Factor común por agrupación de terminos
CASO III	Trimonio cuadrado perfecto
CASO IV	Diferencia de cuadrado perfecto
CASO V	Trimonio cuadrado perfecto por adicción y sustracción
CASO VI	Trimonio de forma $x^2 + bx + c$
CASO VII	Trimonio de forma $ax^2 + bx + c$
CASO VIII	Suma o diferencia de cubos perfectos

CASO I

Por el factor común: un número o letra es factor común en una expresión algebraica cuando figura en cada término como factor.
Si en dos términos de una expresión algebraica figura un factor común dicho polinomio es igual al producto de ese factor por el polinomio que resulta de dividir cada término por dicho factor.

EJERCICIOS:

Factorizamos las siguientes expresiones algebraicas.

a) $5xy + 20x^2 + 10xy =$

Buscamos las variables o coeficientes que se repiten:

$$5xy + 4 \bullet 5x^2 + 5 \bullet 2xy$$

- El factor común es 5x
- Apartamos del grupo el factor común y anotamos entre paréntesis las letras y números que sobran si le quitamos el factor común:

$$5xy + 4 \bullet 5x^2 + 5 \bullet 2xy = \underbrace{5x\,(y + 4x + 2y)}_{\textbf{Factorizado}}$$

b). $2x - 10x^2y^2 + 15x^3y^3$

- Buscamos las variables que se repiten y con menor exponente

$$2xy + 2 \bullet 5x^2y^2 + 3 \bullet 5x^3y^3 =$$

- El factor común es 2x
- Apartamos del grupo el factor común y anotamos entre paréntesis las letras y números que sobran si le quitamos el factor común:

$$2x - 10x^2y^2 + 15x^3y^3 = \underbrace{2x\,(1 - 5x^2y^2 + 2x^3y^3)}_{\textbf{Factorizado}}$$

CASO II
Factor común por agrupación de términos: para factorizar un polinomio en grupos, se reúnen en grupos de igual número de términos y factorizamos en cada grupo por el factor común monomio, luego extraemos el factor común polinomio.

A)	$x^2 + 2x =$
B)	$25\,a^3b^2 - 10^{a5}y^2 + 5a^2b^3y + 15a^6b=$
C)	$34m^3n + 51m^2n^2 - 68mn^3 =$
D)	$15x - 20x^2 + 5x^3 =$
E)	$6x^2y^3 - 3x^3y^2 + 9xy^3 - 3xy^2=$
F)	$10x^2 + 20x =$

Aprendamos juntos a resolver problemas de factorización.

Factorizamos las siguientes expresiones algebraicas

a) $x^2 - 2x + zx - 2z$

- Los dos primeros términos tienen el factor común x y los dos últimos términos tienen como factor común z.

$x^2 - 2x + zx - 2z$

- Por lo consiguiente se pueden agrupar de la siguiente forma.

$x(x - 2) + z\,(x - 2)$

- Sacamos el factor común.

$(x - 2)\,(x + z)$

- Entonces su factorización es: $x^2 - 2x + zx - 2z = (x - 2)\,(x + z)$
- Los dos primeros términos tienen el factor común y, los dos últimos términos tienen como factor común x.

b) $y - 2y + x - 2x$

- Por lo consiguiente se pueden agrupar de la siguiente forma.

$y(1-2) - x\,(1 - 2)$

- Sacamos el factor común.

$(1-2)\,(y - x)$

- Entonces su factorización es: $y - 2y + x - 2x = (1-2)\,(y - x)$

Actividad: observamos detenidamente las siguientes imágenes y buscamos los aspectos comunes.

A)	$x^2n + n^2 + mx^2 + mn =$
B)	$ab^2 + a^2 - b^2x - ax =$
C)	$4ab^2 + 4a^2 - 4b^2x - 4ax =$
D)	$3ax - 7ab^2 + 3a^2 - 7b^2x =$
E)	$y^2x + x^2 - y^2z - xz =$
F)	$3x - 2y - 2ya^4 + 3xa^4 =$

CASO III

Trinomio cuadrado perfecto: para factorizar un trinomio que sea cuadrado perfecto le extraemos la raíz cuadrada del primer y tercer término que son cuadrados perfectos, los separamos con el signo del segundo término y elevamos el binomio al cuadrado.

EJERCICIOS:

Factorizamos las siguientes expresiones algebraicas:

a) $x^2 - 10x + 25$

- Calculamos la raíz cuadrada del primero y tercer término.

$$x^2 - 10x + 25$$

$$\sqrt{(x^2)} = x \qquad \sqrt{25} = 5$$

- El primer término x2 es el cuadrado de x y el ultimo termino 25, es el cuadrado de 5, entonces si el termino intermedio es 10x y el resultado de multiplicar el doble de x por 5 nos da esa cantidad, llegaríamos a tener un trinomio cuadrado perfecto.

$$x2 - 10x + 25$$

$$\sqrt{(x^2\ )} = x \qquad \sqrt{25} = 5$$

$$2\ (x) \bullet 5 = 10x$$

Siempre debemos utilizar el 2 para la multiplicación

- El trinomio puede factorizarse como:

$$2\ (x) \bullet 5 = 10x$$

$$x2 - 10x + 25 = \underbrace{(x-5)^2}_{\text{Binomio al cuadrado}}$$

b) $25a^2 - 10ab + b^2$

- Calculamos la raíz cuadrada del primero y tercer termino.

$$\sqrt{25a^2} = 5a \qquad \sqrt{b^2} = b$$

- El primer término $25a^2$ es el cuadrado de 5a y el último termino b^2, es el cuadrado de b, entonces si el término intermedio es 10ab y el resultado de multiplicar el doble de 5a por b nos da esa cantidad, llegaríamos a tener un trinomio cuadrado perfecto.

$$25a^2 - 10ab + b^2$$

$$\sqrt{25a^2} = 5a \qquad \sqrt{b^2} = b$$

$$2\ (5a) \bullet b = 10ab$$

El trinomio puede factorizarse como: $25a^2 - 10ab + b^2 = (5a - b)^2$

Actividad: en el cuaderno de prácticas resolvemos las siguientes actividades propuestas.

A)	$25 + 10x + x^2 =$
B)	$16m^4 - 8m^2 + 1 =$
C)	$49x^{n6} - 28x^{3n}\ y^n + 4y^{2n} =$
D)	$169a^2 - 130a + 25 =$
E)	$\frac{x^2}{16} + 2x + 16 =$
F)	$\frac{x^2}{4} - \frac{xy}{3} + \frac{y^2}{9} =$

DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN ALTERNATIVA

CASO IV
Diferencia de cuadrados perfectos: Se extrae la raíz cuadrada al primero y al segundo término y se multiplica la suma de estas raíces cuadradas por la diferencia entre las raíces de las bases de dichos cuadrados. Es así que para factorizar con diferencia de cuadrados perfectos debemos.

EJERCICIOS:

Factorizamos las siguientes expresiones algebraicas:

a) x2 – 16

- Se extrae las raíces de los términos.

$$x^2 - 16$$

$$\sqrt{(x^2)} = x \qquad \sqrt{16} = 4$$

- Se forma el binomio (x + 4) y se multiplica por su conjugado, pero con el signo contrario.

$$x2 - 16 = \underbrace{(x+4)(x-4)}_{\text{Factorizado}}$$

b) $144x^4 y^6 - 121z^{12}$

- Se extrae las raíces de los términos.

$$144x^4 y^6 - 121z^{12}$$

$$\sqrt{(144x^4 y^6)} = 12x^2y^3 \qquad \sqrt{121z^{12})} = 11z^6$$

- Se forma el binomio (x + 4) y se multiplica por su conjugado, pero con el signo contrario.

$$144x^4 y^6 - 121z^{12} = \underbrace{(12x^4y^3 + 11z^6)(12x^4y^3 - 11z^6)}_{\text{Factorizado}}$$

Actividad: en el cuaderno de prácticas resolvemos las siguientes actividades propuestas.

A)	$x^2 - 4 =$
B)	$100 - a^4 =$
C)	$x^2 - a^2 b^2 =$
D)	$225x^8 - 196z^{12} =$
E)	$\frac{225x^4}{49} + \frac{b^4}{25} =$
F)	$\frac{225x^4}{49} - 100y^4 z^4 =$

APRENDIZAJES APLICADOS - MATEMÁTICA

CASO V

Trinomio cuadrado perfecto por adicción y sustracción: Está conformado por tres términos, dentro de estos el primer y tercer término deben ser cuadrados perfectos, Este caso se aplica en el trinomio que no es cuadrado perfecto, ya que el segundo término no es el doble del producto de las raíces de los otros términos, por lo que es necesario complementarlo (Acnomonge, 4 de febroro, 2017). Para aplicar este caso debemos:

- **Ver que las expresiones estén ordenadas tomando en cuanta de mayor a menor a los exponentes de las letras, después debemos verificar si es trinomio dado es cuadrado perfecto, extrayendo la raíz cuadrada del primero y tercer término, luego multiplicamos 2 por el producto de dichas raíces en caso de no ser igual al segundo término sumamos y restamos la cantidad necesaria para convertirlo en un trinomio cuadrado perfecto, luego factorizamos la diferencia de cuadrados perfectos y se simplifica para llegar a la solución.**

EJERCICIOS:

Factorizamos las siguientes expresiones algebraicas:

a) $4m^4 + 3m^2n^2 + 9n^4$

- Verificamos el trinomio cuadrado es perfecto para ello sacamos la raíz cuadrada del primero y tercer termino

$$4m^4 + 3m^2n^2 + 9n^4$$

$$\sqrt{4m^4} = 2m^2 \qquad \sqrt{9n^4} = 3n^2$$

- Ahora multiplicamos por 2 el producto de las raíces cuadradas

$$4m^4 + 3m^2n^2 + 9n^4$$

$$2\,(2m^2)\,3n^2 = 12m^2\,n^2$$

(Como este resultado no es igual al tercer término de la expresión debemos de restar con el dicho termino)

$$12m^2\,n^2 - 3m^2n^2 = 9\,m^2n^2$$

- Por lo tanto, el tercer término debemos completar sumando 9m2n2 para poder formar un trinomio cuadrado perfecto, pero a la vez también debemos restar la misma cantidad para no alterar la expresión.

$$4m^4 + 3m^2n^2 + 9n^4 + 9m^2n^2 - 9m^2n^2$$

Sumamos ambos términos para formar el trinomio cuadrado perfecto

$$4m^4 + 12m^2n^2 + 9n^4 - 9m^2n^2$$

- Factorizamos el trinomio cuadrado perfecto

$$4m^4 + 12m^2n^2 + 9n^4 - 9m^2n^2$$

$$\sqrt{4m^4} = 2m^2 \qquad \sqrt{9n^4} = 3n^2 \qquad \sqrt{9m^2\,n^2} = 3mn$$

DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN ALTERNATIVA

$$2\,(2m^2)\,3n^2 = 12m^2\,n^2$$

$$(2m^2 + 3n^2)^2 \;-\; 3mn$$

- Ahora factorizamos por diferencia de cuadrados, tomando en cuenta que para este caso se coloca un signo positivo y otro negativo en el término correspondiente.

$$(2m^2 + 3n^2 + 3mn)\,(2m^2 + 3n^2 - 3mn)$$

- Ordenamos el ejercicio tomando en cuenta el exponente de mayor a menor de la parte literal y nuestra expresión ya estará factorizada

$$\boxed{4m^4 + 3m^2n^2 + 9n^4 = (2m^2 + 3mn + 3n^2)\,(2m^2 - 3mn + 3n^2)}$$

Actividad: en el cuaderno de prácticas resolvemos las siguientes actividades propuestas.

A)	$25x^4 + 54x^2y^2 + 49 =$
B)	$16x^4 - 57x^2y^2 + 36y^4 =$
C)	$36a^2 - 109a^2b^2 + 49b^4 =$
D)	$x^4 + x^2 + 9 =$
E)	$225x^4 + 5x^2y^2 + y^4 =$
F)	$121x^4 - 133x^2y^2 + 36y^4 \;=$
G)	$x4 - 14x^2\,y^2 + 25y^4 =$

CASO VI

Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$: para factorizar sugerimos los siguientes pasos:

- **Abrimos dos paréntesis**
- **Se extrae la raíz del primer término y se coloca en ambos factores binomios (x)(x).**
- **En el primer factor se coloca el signo del segundo término y para el segundo factor se multiplica el signo del segundo y tercer término (x) (x).**
- **Buscamos dos números que sumados algebraicamente dé el coeficiente del segundo término y el producto dé el tercer termino.**

EJERCICIOS:

Factorizamos las siguientes expresiones algebraicas:

a) x2 +11x +24

- Extraemos la raíz cuadrada del primer termino

$$x^2 + 11x + 24$$

$$\sqrt{x2} = x$$

APRENDIZAJES APLICADOS - MATEMÁTICA

- El resultado colocamos en el primer término del binomio

$$(x \quad)(x \quad)$$

- En el primer factor colocamos el signo del segundo término y para el segundo factor multiplicamos los signos del segundo y tercer termino.

$$x^2 + 11x + 24$$

$$(x + \quad)(x + \quad)$$

- Buscamos dos números que sumados sean igual al coeficiente del segundo término y multiplicados sean igual al tercer término 8 + 3= 11 y 8 . 3 = 24. Entonces la factorización es:

$$\boxed{x^2 + 11x + 24 = (x + 8)(x + 3)}$$

b) x2 + 3x – 180

- Cuando las cantidades son altas es complicado hallar dos números que sumados o restados nos de la cantidad del segundo término y multiplicando obtengamos el producto del tercer término, es por ello que podemos descomponer el tercer término en sus factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

2. 2. 3 = 12

3. 5 = 15

Es así que encontramos los dos números que restados son igual al coeficiente del segundo término y multiplicados son igual al tercer término 15 - 12= 3 y 15 . 12 = 180. Entonces la factorización es:

$$\boxed{x^2 + 3x - 180 = (x + 15)(x - 12)}$$

Actividad: en el cuaderno de prácticas resolvemos las siguientes actividades propuestas.

A)	$x^2 + 8x + 15 =$
B)	$a^2 + 11a + 28=$
C)	$y^2 - 10y - 56=$
D)	$x^2 - 32x + 225 =$
E)	$m^2 + 8m - 180=$
F)	$x^2 + x +132 \quad =$
g)	$x^4 - 14x^2 y^2 + 25y^4 \quad =$

CASO VII

Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ (aspa simple): la factorización por el método del aspa simple, consiste en escribir los términos ax2 y c como producto de dos factores, tales que la suma algebraica de productos cruzados nos dé el término central.

EJERCICIOS:

Factorizamos las siguientes expresiones algebraicas:

a) 6x2 + 11x + 4

•Descomponemos el termino 6x2 en dos factores que multiplicados nos permitan volver a obtener 6x2 y realizamos el mismo procedimiento con el tercer término.

$$6x^2 + 11x + 4$$

$$\begin{array}{c} 3x \\ \hline 2x \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2 \\ \hline 2 \end{array}$$

- Para hallar el tercer término debemos multiplicar en forma cruzada ambos factores incluyendo los signos

$$6x^2 + 11x + 4$$

$$\begin{array}{c} 3x \\ \hline 2x \end{array} \quad \begin{array}{c} 4 \\ \hline 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} =8x \\ \hline =3x \end{array}$$

- Para poder representar la expresión factorizada debemos tomar en cuenta que:

$$6x^2 + 11x + 4$$

3x ·······→4 Esta expresión es el primer factor del binomio
2x ·······→1 Esta expresión es el segundo factor del binomio

- Entonces su factorización es:

$$6x^2 + 11x + 4 = (3x + 4)(2x + 1)$$

Actividad: en el cuaderno de prácticas resolvemos las siguientes actividades propuestas.

A)	$2x^2 + 7x + 6 =$
B)	$20m^2 + 7m - 6=$
C)	$21x^2 – 29x - 72=$
D)	$4x^2 + 7x - 15 =$
E)	$20m^2 + 9m - 20=$
F)	$10y^2 + 11y +3 \quad =$

CASO VIII

Suma o diferencia de cubos: Este caso se caracteriza por la utilización de fórmulas que son las siguientes:

- **Para suma: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - a.b + b^2)$**
- **Para diferencia: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + a \bullet b + b^2)$ (Baldor, 2002)**

Valoramos nuestros conocimientos adquiridos

Reflexionamos sobre la importancia y aplicación de la factorización en nuestra experiencia, a través de la resolución de problemas donde aplicamos los casos de factorización en la vida cotidiana.

Resolución de problemas

Resolvamos los siguientes problemas planteados, donde implementamos los diferentes casos de factorización.

EJERCICIOS:

Factorizamos las siguientes expresiones algebraicas:

a) $27x^3 + 64$

- Sacamos las raíces cubicas de cada termino

$$27x^3 + 64$$

$$\sqrt[3]{27x^3} = 3x \qquad \sqrt[3]{64} = 4$$

- Anotamos ambos productos de acuerdo a la formula $(a + b)(a^2 - a.b + b^2)$

$$\sqrt[3]{27x^3} = 3x \qquad \sqrt[3]{64} = 4$$

$$27x^3 + 64 = (3x + 4)\left((3m)^2 - 3x \bullet 4 + 4^2\right)$$

- Resolvemos la expresión

$$27x^3 + 64 = (3x + 4)\left((3x)^2 - 3x \,.\, 4 + 4^2\right)$$

$$= (3x + 4)(9x^2 - 12x + 16)$$

- Entonces su factorización es:

$$\boxed{27x^3 + 64 = (3x + 4)(9x^2 - 12x + 16)}$$

b) 8 - 125x6

- Sacamos las raíces cubicas de cada termino

$$8 - 125x^6$$

$$\sqrt[3]{8} = 2 \qquad \sqrt[3]{125x^6} = 5x^2$$

- Anotamos ambos productos de acuerdo a la formula $(a - b)(a^2 + a \bullet b + b^2)$

$$\sqrt[3]{8} = 2 \qquad \sqrt[3]{125x^6} = 5x^2$$

$$8 - 126x^6 = (2 - 5x^2)(2^2 + 2 \bullet 5x^2 + (5x^2)^2)$$

- Resolvemos la expresión

$$8 - 126x^6 = (2 - 5x^2)(2^2 + 2 \bullet 5x^2 + (5x^2)^2)$$

$$= (2 - 5x^2)(4 + 10x^2 + 25x^4)$$

- Entonces su factorización es:

$$\boxed{8 - 126x^6 = (2 - 5x^2)(4 + 10x^2 + 25x^4)}$$

Actividad: en el cuaderno de prácticas resolvemos las siguientes actividades propuestas.

A)	$a^3 + h^3 =$
B)	$64x^3 - 125y^3 =$
C)	$1000x^6 - 8y^6 =$
D)	$729x^3 + 27y^3 =$
E)	$8x^3 - 1 =$
F)	$27x^3 - y^3 =$

Factorización por método de Ruffini

La regla de Ruffini es un método que nos permite obtener las raíces de un polinomio, es decir este método consiste en escoger una posible raíz (del término independiente, cuyos divisores de este son los candidatos) y desarrollar una tabla, si el ultimo resultado de la tabla es 0, el procedimiento habrá finalizado correctamente, de no ser así tendremos que comprobar con otra posible raíz.

EJERCICIOS

Factorizamos las siguientes expresiones algebraicas:

a) x3 + 2x2 –x – 2

- Identificamos los coeficientes de cada término.

$$x^3 + 2x^2 - x - 2$$

$$1 \quad 2 \quad -1 \quad -2$$

- Buscamos los factores del término independiente.

$$2 = \pm(1,2)$$

- Trazamos dos líneas perpendiculares y ordenamos de la siguiente manera.

  Están los coeficientes de cada termino.

  Se coloca cualquiera de los factores que nos permita obtener 0 – Además este número representa al binomio x–a.

- Empezamos a ejecutar el método, para ello el primer espacio de la fila siempre se deja libre.

  Se multiplica ambos términos.

  El producto de la multiplicación se coloca debajo del segundo termino.

  Se suman estos dos términos y el resultado se multiplica por el factor 1 y se realiza el mismo procedimiento con los demás términos.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & +2 & -1 & -2 \\ \hline & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & +2 & -1 & -2 \\ 1 & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

- Si no tendríamos un cero como producto final tendríamos que probar con otro número a la izquierda de la línea vertical y reiniciar el proceso, como tenemos un cero no hace falta comprobar con otro número, pero si tenemos que reiniciar el proceso con la última fila de la ecuación debido a que tenemos una x^2 y tenemos que llegar a tener x.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & +2 & -1 & -2 \\ & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 \\ & x^2 & x^1 & x^0 & \end{array}$$

  1ra raíz: (x–1)

- El factor que nos permitirá obtener un 0 es el –1

$$\begin{array}{r|rrr} & 13 & & 2 \\ -2 & & -2 & -2 \\ \hline & 11 & & 0 \end{array}$$

  2da raíz: (x+1)

  3ra raíz: (x+2)

- El resultado de la factorización de la ecuación por el método de Ruffini es el producto de la última fila y de los números que están a la izquierda de la línea vertical, pero expresados en forma de ecuación. Por lo tanto, nuestra ecuación será:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(x+2)(x-1)$$

Valoramos nuestros conocimientos adquiridos

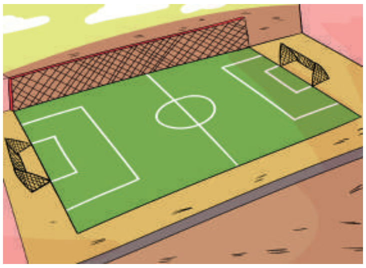
Reflexionamos sobre la importancia y aplicación de la factorización en nuestra experiencia, a través de la resolución de problemas donde aplicamos los casos de factorización en la vida cotidiana.

Actividad: Resolvamos los siguientes problemas planteados, donde implementamos los diferentes casos de factorización.

1. Una cancha de futbol tiene un área representada por A = x^2 + 6x +8 ¿Cuáles serían las longitudes de la cancha?

   Largo: (x+4), Ancho: (x +2)

   El área del rectángulo se haya multiplicado el largo por el ancho y el área nos está diciendo que es A = x^2 + 6x +8, ahora lo que tenemos que encontrar es el largo y el ancho que multiplicados nos den el área planteado, para ello aplicaremos el caso de factorización VI y un factor será el largo y otro factor será el ancho



R.- $A = x^2 + 6x + 8 = (x+4)(x+2)$ por lo tanto $(x+4)$ es el largo y $(x+2)$ es el ancho

Realiza el procedimiento de la factorización en tu cuaderno

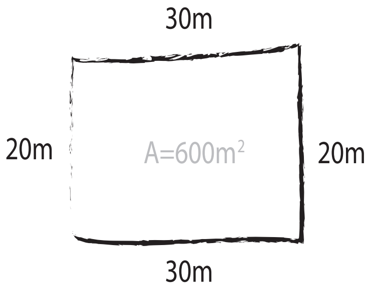
2. Una parcela de sembradío tiene un área representada por $A = x^2 + 3x - 18$ ¿Cuáles serían las longitudes de la parcela?

   Largo: $(x+6)$, Ancho: $(x-3)$

   Realiza el procedimiento de la factorización en tu cuaderno

3. Para cercar el huerto escolar (rectangular) de $600m^2$ se ha usado 100 metros de alambre. ¿Las dimensiones del huerto son?

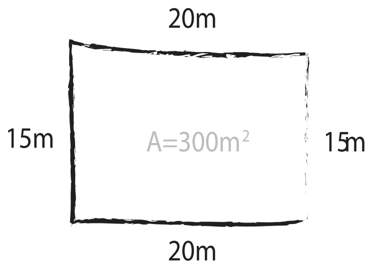
   Recuerda que el área se obtiene multiplicando la base por altura 20m . 30m= $600m^2$ y el perímetro que sería alrededor del área se obtiene sumando los cuatro lados de la figura **20m + 30m + 20 m +30 m = 100m**



   Realiza el procedimiento correspondiente en tu cuaderno e indica que caso se factorización aplicaste

6. Para cercar un terreno rectangular de $300m^2$ se ha usado 70 metros de alambre. ¿las dimensiones de la finca son?
   20m, 15m, 15m, 20m

   Recuerda que el área se obtiene multiplicando la base por altura 15m . 20m= $300m^2$ y el perímetro que sería alrededor del área se obtiene sumando los cuatro lados de la figura 15m **+ 20m + 15 m +20 m = 70m**



   Realiza el procedimiento correspondiente en tu cuaderno e indica que caso se factorización aplicaste.

Plantea y resuelve un problema aplicando cualquier caso de factorización.

Unidad temática N.º 5

Fracciones algebraicas

Partamos de nuestra experiencia

¿Las fracciones algebraicas solucionan problemas cotidianos?

SÍ **NO**

¿Por qué?

R.- ....
....
....
....
....
....
....

Analicemos el siguiente problema donde utilizamos las fracciones en la vida cotidiana.
Violeta bebió 3/8 de litro de leche en la mañana y 1/4 de litro de leche en la tarde.
¿Cuánta leche tomo en total?
R.- Violeta bebió 5/8 de litros de leche
Realiza el procedimiento en tu cuaderno

Profundicemos nuestros saberes y conocimientos

Fracción algebraica

Es el cociente indicado de dos expresiones algebraicas, es decir a/b es una fracción algebraica porque es el cociente indicado de la expresión a (numerador) entre la expresión b (denominador).

(Westrelcher) Menciona que una expresión algebraica es una combinación de variables, números y signos de operaciones (suma, resta. Multiplicación, división, potenciación, logaritmos), es por ello que cabe señalar que en estas expresiones: El numerador como el denominador pueden contener sumatorias, restas, multiplicaciones o incluso potencias.

El resultado debe existir, por lo que el denominador debe ser distinto a cero.

Simplificación de fracciones algebraicas

Simplificación de fracciones algebraicas nos referimos a convertir una fracción equivalente cuyos términos sean primos entre sí, para que nuestro ejercicio este reducido en su más simple expresión o mínima expresión y para ello aplicaremos los siguientes cuatro casos:

Aprendamos juntos a resolver fracciones algebraicas

EJERCICIOS:

1. $\frac{18x^3y^2}{6x^2} =$

Simplificamos primero los coeficientes o números $\frac{\overset{3}{\overset{9}{\cancel{18}}}}{\underset{1}{\underset{3}{\cancel{6}}}} = \frac{3}{1}$	Simplificamos las letras $\frac{x^3\,y^2}{x^2} = \frac{\cancel{xx}xyy}{\cancel{xx}} = xy^2$
	Entonces nuestra fracción queda: $\frac{8x^3\,y^2}{6x^2} = \frac{3xy^2}{1} = 3xy^2$

2. $\frac{2x^3y^5}{10x^6y^6} =$

Simplificamos primero los coeficientes o números $\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{5}{\cancel{10}}} = \frac{1}{5}$	Simplificamos las letras $\frac{x^3\,y^5}{x^6\,y^6} = \frac{1 \bullet 1}{x^3y}$
	Entonces nuestra fracción queda: $\frac{2x^3\,y^5}{10x^6\,y^6} = \frac{1.1.1}{5x^3\,y} = \frac{1}{5x^3\,y}$

Actividad: En el cuaderno de prácticas resolvemos los siguientes problemas planteados.

A) $\frac{5x^3\,y^5}{10x^6\,y^6} =$

B) $\frac{m^5\,n^5}{m^3n^5} =$

C) $\frac{6a^3bc^3}{8ab^2c^3} =$

D) $\frac{12x^3\,y^4\,z^5}{32x^2\,y^2\,z^4} =$

3. $\dfrac{x^2+5x-7}{x^2+3x-4} =$

El numerador y denominador se factoriza con el método del aspa.

$$\begin{array}{lcl} & 2x^2+5x-7 & \\ 1x & -1 = & 2x \\ 2x & 7 = & 7x \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} & x^2+3x-4 & \\ x & -1 = & -1x \\ x & 4 = & 4x \end{array}$$

Formamos nuestra fracción y simplificamos los términos semejantes:

$$\frac{2x^2+5x-7}{x^2+3x-4} = \frac{\cancel{(x-1)}(2x+7)}{\cancel{(x-1)}(x+4)} = \frac{2x+7}{x+4} =$$

4. $\dfrac{3m+15}{m^2-25} =$

El numerador factorizamos por el método factor común y el denominador por el método diferencia de cuadrados.

$$3m+15 = 3\,(m+5) \qquad m^2-25 = (m+5)\,(m-5)$$

$$\sqrt{m^2} = m \qquad \sqrt{25} = 5$$

Formamos nuestra fracción y simplificamos los términos semejantes:

$$\frac{3m+15}{m^2-25} = \frac{3\,\cancel{(m+5)}}{\cancel{(m+5)}\,(m-5)} = \frac{3}{(m-5)} =$$

Actividad: En nuestro cuaderno de prácticas resolvamos los siguientes problemas planteados.

A) $\dfrac{x^2-5x+6}{2ax-6a} =$

B) $\dfrac{8a^3+27}{4a^2+12a+9} =$

C) $\dfrac{5-5r}{10rt-10t} =$

D) $\dfrac{x^2-9x-20}{4x^2-x^2} =$

1. $\dfrac{4-4x}{6x-6} =$

El numerador factorizamos por el método factor común y el denominador por el método diferencia de cuadrados.

$$4-4x = 4\,(1-x) \qquad 6x-6 = 6(x-1)$$

Formamos nuestra fracción y simplificamos los términos semejantes:

$$\frac{4-4x}{6x-x}=\frac{4\,(1-x)}{6\,(x-1)}=\frac{4\,\cancel{(1-x)}}{6\,\cancel{(1-x)}}=-\frac{\cancel{4}}{\cancel{6}}=-\frac{2}{3}$$

$$(x-1)=-(1-x)$$
$$=-1+x$$

Para cambiar se signó en el término colocamos el signo – delante del denominador, luego realizamos la multiplicación respectiva e intercambiamos la posición de los componentes del polinomio para poder simplificar con el numerador.

1. $\frac{3y-6x}{2mx-my-2nx+ny}=$

El numerador y el denominador factorizamos con el método de factor común.

$3y-6x=3(y-2x)$ $\qquad$ $mx-my-2nx+ny=m(2x-y)-n\,(2x-y)$

Formamos nuestra fracción y simplificamos los términos semejantes:

$$\frac{3y-6x}{2mx-my-2nx+ny}=\frac{3\,(y-2x)}{m(2x-y)-n\,(2x-y)}=\frac{3\,(y-2x)}{(2x-y)\,(m-n)}=$$

$$-\frac{3\,\cancel{(y-2x)}}{\cancel{(y-2x)}\,(m-n)}=-\frac{3}{m-n}=\frac{3}{n-m}$$

Multiplicamos el signo con el denominador

Actividad: En el cuaderno de prácticas resolvemos los siguientes problemas planteados.

A)	$\frac{x^2-9}{3x-3y-x^2+xy}=$
B)	$\frac{m^2-n^2}{(n-m)^2}=$
C)	$\frac{5-5r}{10rt-10t}=$
D)	$\frac{9-9x+x^2}{x^2-7x+12}=$

Máximo Común Divisor (M.C.D)

El Máximo Común Divisor de dos números, comúnmente denotado como MCD(a, b), es el número entero más grande que divide exactamente a ambos. Por ejemplo, el MCD(12, 18) es 6, ya que 6 es el número más grande que divide tanto a 12 como a 18 sin dejar residuo.

Aprendamos juntos a resolver fracciones algebraicas

Ejercicios.

Sacamos el MCD de las siguientes expresiones algebraicas:

a) a^2b ; a^3x

Para hallar el MCD de monomios debemos buscar un factor común y con menor exponente .

$a^2b ; a^3x = a^2$ → Es **a²** porque **a** esta repetida en ambos monomios y **a²** es la letra con menor exponente.

b) $12a^2b$; $18a^3x$

Primero sacamos el MCD de los coeficientes:

$$\begin{array}{c|c} 18 & 2 \\ 9 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Se marca solo los numero que dividen a los dos términos y luego multiplica entre los números marcados y ese es el factor común de los coeficientes

Este número se sigue bajando porque no es divisible entre 2

Entonces el m.c.d. de los coeficientes es 6 y de las letras es a^2 porque a esta repetida en ambos monomios y a^2 es la letra con menor exponente.

$$12a^2b ; 18a^3x = 6a^2$$

Actividad: en el cuaderno de prácticas resolvemos los siguientes problemas planteados.

A)	$a^2x; ax^2 =$
B)	$18mn^2 ; 27a^2m^3n^4 =$
C)	$15a^2b^3c ; 24ab^2x ; 36b^4x^2 =$
D)	$2x^2y ; x^2y^3 =$

Ejercicios.

Sacamos el MCD de las siguientes expresiones algebraicas:

$x^2 + 2x ; x^2 - 4$

Factorizamos por medio del caso de factorización factor común el primer polinomio, pero el segundo polinomio por el caso de diferencia de cuadrados.

$$x^2 + 2x = x(x + 2) \qquad x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$$

Entonces el m.c.d. es (x + 2) porque está en los dos polinomios, en cambio x solo es parte del primer polinomio y (x-2) solo es farte del segundo polinomio por eso ninguno de estos dos últimos es factor común.

A)	$2a^2 + 2ab\,x; 4a^2 - 4ab =$
B)	$x^2 - x ; x^2 - x^3 =$
C)	$5a^2 - 15a; a^3 - 3a^2 =$
D)	$3x^2 + 3x - 60; 6x^2 - 18x - 24$

Ejercicios.

Sacamos el MCD de las siguientes expresiones algebraica.

$16x^3 + 36x^2 - 12x - 18; 8x^2 -2x -3$

$$\cancel{16x^3} + 36x^2 - 12x - 18;\ 8x^2 -2x -3$$
$$2x + 5$$
$$\underline{\cancel{-16x^3} + 4x^2 + 6x}$$
$$\underline{\cancel{40x^2} - 6x - 18}$$
$$\underline{\cancel{-40x^2} + 10x + 15}$$
$$4x - 3$$

Se obtiene de la división de los primeros términos y este se multiplica con todos los términos del polinomio que es de menor grado y el producto al pasar donde el polinomio con mayor grado pasa con el signo contrario.

En vista de que el factor obtenido no es de menor grado que el divisor otra vez se realiza el mismo procedimiento que el anterior. porque no es divisible entre 2.

Aquí detenemos la división porque el primer término del residuo **4x** es inferior al término del divisor **8x².**

$8x^2 -2x -3; 4x - 3$

$$\cancel{8x^2} - 2x - 3 \div 4x - 3$$
$$2x + 1$$
$$\underline{\cancel{-8x^2} + 6x}$$
$$4x - 3$$
$$\underline{-4x + 3}$$

Como la división es exacta, el divisor **4x – 3** es el MCD

Actividad: en el cuaderno de prácticas resolvemos los siguientes problemas planteados.

A)	$12x^2 + 8x + 1; 2x^2 - 5x - 3 =$
B)	$6a^2 - 2a - 20; 2a^3 - a^2 - 6a =$
C)	$8a^4 - 6a^3x + 7a^2x^2 - 3ax^3 ; 2a^3 + 3a^2x - 2ax^2 =$
D)	$5a^3 - 6a^2x + ax^2 ; 3a^3 - 4a^2x + ax^2 =$

Mínimo Común Múltiplo (mcm)

El mínimo como un múltiplo de dos o más expresiones algebraicas es la expresión algebraica de menor coeficiente numérico y de menor grado que es divisible exactamente por cada una de las expresiones dadas. Es así que el m.c.m. podemos sacar por medio de dos casos que son los siguientes:

Aprendamos juntos a resolver fracciones algebraicas

Ejercicios.

Sacamos el MCM de las siguientes expresiones algebraicas:

a) $6mn^2$; $9m^2n^3$; $12m^3n$

Para hallar el m.c.m. de monomios primero descomponemos en sus factores primos los coeficientes y analizamos las letras buscando los mayores exponentes de las letras que tienen los monomios.

6	9	12	2
3	9	6	2
3	9	3	3
1	3	1	3
	1		

Multiplicamos todos los factores primos
2.2.3.3 = 36

mn^2; m^2n^3; m^3n

$m^3\ n^3$

Entonces el **m.c.m.** de esta expresión es **$36\ m^3\ n^3$**

b) $8ax^2$; $12a^3b$; $18b^5x$

Para hallar el m.c.m. de monomios primero descomponemos en sus factores primos los coeficientes y analizamos las letras buscando los mayores exponentes de las letras comunes y no comunes que tienen los monomios.

8	12	18	2
4	6	9	2
2	3	9	2
1	3	9	3
	1	3	3
		1	

Multiplicamos todos los factores primos es **72**

ax^2 ; a^3b ; b^5x

$a^3\ b^5\ x^2$

Entonces el **m.c.m.** de esta expresión es **$72a^3b^5x^2$**

A)	**a^2; ab^2 =**
B)	**$5x^2$; $10xy$; $15xy^3$ =**
C)	**$9ax^3y^4$; $15x^2y^5$ =**
D)	**$10m^2$; $15mn^2$; $20n^3$ =**

Ejercicios:

Sacamos el M.C.M. De las siguientes expresiones algebraicas:

$x^2 + 5x + 6$; $2x^2 + 3x - 5$

Para hallar el m.c.m., de polinomios primero debe factorizarse con los casos de factorización que requiera cada polinomio pero siempre que sea posible.

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2); \qquad 2x^2 + 3x - 5 = (2x + 5)(x - 1)$$

Entonces el m.c.m. de esta expresión es **$(x+3)(x+2)(2x+5)(x-1)$** porque ningún termino se repite por lo tanto el m.c.m. son todos los factores.

b) $6x + 5$; 4; $10x^2$

Para hallar el m.c.m. de polinomios primero debe factorizarse con los casos de factorización que requiera cada polinomio pero siempre que sea posible.

$6x + 5 =$
No puede factorizarse

Entonces el m.c.m. de esta expresión es **10x2 (6x+5)** porque el polinomio no puede factorizarse, en caso de factorizarse se escoge los términos que no se repitan.

4	10	2
2	5	2
1	5	5
	1	

Sacamos el m.c.m de los monomios por separado y este m.c.m multiplica a los m.c.m obtenidos de los polinomios.

Actividad: en el cuaderno de prácticas resolvemos los siguientes problemas planteados.

A)	$2a$; $4x - 8 =$
B)	$3x + 3$; $6x - 6 =$
C)	$(x - 1)^2$; $x^2 - 1 =$
D)	$5x + 10$; $10x^2 - 40 =$

Operaciones con fracciones algebraicas

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE FRACCIONES

Para sumar o restar fracciones algebraicas es necesario simplificar al mínimo común denominador, basta aplicar las siguientes reglas.

- **Es necesario factorizar los denominadores compuestos de las fracciones dadas**
- **Hallar el m.c.m. de los denominadores de las fracciones dadas. Este será el mínimo común denominador.**

Adición y sustracción de fracciones algebraicas con denominadores monomios.

Ejercicios.

Resolvemos la adición y sustracción de fracciones:

a) $\dfrac{a+b}{3a} \; \dfrac{a-b}{2b} =$

El m.c.m. de los denominadores es 6a, este se divide entre los denominadores 6ab ÷2a es 2b y se multiplica por el numerador teniendo como producto 2b(a+b), el mismo procedimiento se realiza con el siguiente denominador.

$$\frac{a+b}{3a} + \frac{a-b}{2b} = \frac{2b\,(a+b) + 3a\,(a\text{-}b)}{6ab}$$

Resolvemos la multiplicación del denominador y el numerador se copia el mismo.

$$\frac{a+b}{3a} + \frac{a-b}{2b} = \frac{2b\,(a+b) + 3a\,(a-b)}{6ab} = \frac{2ab + 2b^2 + 3a^2 - 3ab}{6ab}$$

Reducimos los términos semejantes para tener el producto de la suma.

$$\frac{a+b}{3a} + \frac{a-b}{2b} = \frac{2b\,(a+b) + 3a\,(a-b)}{6ab} = \frac{2ab + 2b^2 + 3a^2 - 3ab}{6ab} = \frac{2b^2 + 3a^2 - ab}{6ab}$$

b) $\dfrac{3}{5} - \dfrac{2a+1}{10a} - \dfrac{4a^2+1}{20a^2} =$

Sacamos el m.c.m de los denominadores tanto de la parte numeral como de la parte literal.

5	10	20	2	
5	5	10	2	a $\quad a^2$
5	5	5	5	El M.C.M de esta resta es **$20a^2$**
1	1	1		

El m.c.m dividimos entre denominadores y los cocientes multiplicamos por todos los numeradores existentes, el signo de la resta sube al numerador juntamente con el cociente de la división.

$$\frac{3}{5} - \frac{2a+1}{10a} - \frac{4a^2+1}{20a^2} = \frac{4a^2\,(3) - 2a\,(a+1) - (4a^2-1)}{20a^2} =$$

Resolvemos la multiplicación del denominador.

$$\frac{3}{5} - \frac{2a+1}{10a} - \frac{4a^2+1}{20a^2} = \frac{4a^2\,(3) - 2a\,(2a+1) - 1\,(4a^2-1)}{20a^2} = \frac{12a^2 - 4a^2 - 2a - 4a^2 - 1}{20a^2}$$

Reducimos los términos semejantes para tener el producto de la resta.

$$\frac{3}{5} - \frac{2a+1}{10a} - \frac{4a^2+1}{20a^2} = \frac{4a^2\,(3) - 2a\,(2a+1) - 1\,(4a^2-1)}{20a^2} = \frac{12a^2 - 4a^2 - 2a - 4a^2 - 1}{20a^2} = \frac{4a^2 - 2a - 1}{20a^2}$$

Actividad: en el cuaderno de prácticas resolvemos los siguientes problemas planteados.

A)	$\frac{x-2}{4}+\frac{3x+2}{6}=$
B)	$\frac{m}{n^2}+\frac{3}{mn}+\frac{2}{m}=$
C)	$\frac{a-1}{3}+\frac{2a}{6}+\frac{3a+4}{12}=$
D)	$\frac{x+2}{3x}+\frac{x^2-2}{5x^2}+\frac{2-3x}{9x^3}=$
E)	$\frac{x-3}{4}+\frac{x+2}{8}=$
F)	$\frac{y-2}{20x}-\frac{x-3y}{24y}=$
G)	$\frac{1}{2a}-\frac{2+b}{3ab}-\frac{5}{6a^2\,b2}=$
H)	$\frac{3}{5}-\frac{2a+1}{10a}-\frac{4a^2-1}{20a^2}=$

Adición y sustracción de fracciones algebraicas con denominadores compuestos.

Ejercicios.

Resolvemos la adición y sustracción de fracciones:

a) $\frac{1}{a^2-b^2}+\frac{1}{(a-b)^2}=$

Hallamos el m.c.m. de los denominadores por medio de la factorización de los mismos.

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$(a-b)^2$ = ya está factorizada

$\underbrace{(a+b)\,(a-b)\,(a-b)^2}$

Buscamos los términos comunes y no comunes y elegimos el que tiene mayor exponente. Entonces el m.c.m es: **(a+b)(a-b)2**

El m.c.m dividimos entre denominadores y los cocientes multiplicamos por todos los numeradores existentes.

$$\frac{1}{a^2-b^2}+\frac{1}{(a-b)^2}=\frac{a-b+a+b}{(a+b)\,(a-b)^2}$$

Reducimos los términos semejantes para tener el producto de la suma

$$\frac{1}{a^2-b^2}+\frac{1}{(a-b)^2}=\frac{a-b+a+b}{(a+b)\,(a-b)^2}=\frac{a-b+a+b}{(a+b)\,(a-b)^2}=\frac{2a}{(a+b)\,(a-b)^2}$$

b) $\frac{a-4}{a^2-6a+9}-\frac{a+3}{a^2+a-12}=$

Factorizamos los polinomios del denominador de acuerdo a los casos de factorización que se requiera, luego sacamos el m.c.m.

$$a^2 - 6a + 9 = (a - 3)(a - 3) = (a - 3)^2 \qquad a^2 + a - 12 = (a + 4)(a - 3)$$

$$\text{m.c.m} = (a - 3)^2 (a + 4)$$

El m.c.m dividimos entre denominadores y los cocientes multiplicamos por todos los numeradores existentes, el signo de la resta sube al numerador juntamente con el cociente de la división.

$$\frac{a-4}{a^2-6a+9} - \frac{a+3}{a^2+a-12} = \frac{(a+4\,(a-4) - (a-3)\,(a+3)}{(a-3)^2\,(a+4)} =$$

Resolvemos la multiplicación del denominador por el método de diferencia de cuadrados.

$$\frac{a-4}{a^2-6a+9} - \frac{a+3}{a^2+a-12} = \frac{(a+4)\,(a-4) - (a-3)\,(a+3)}{(a-3)^2\,(a+4)} = \frac{a^2 - 16 - (a^2-9)}{(a-3)^2\,(a+4)} = \frac{a^2 - 16 - a^2 + 9}{(a-3)^2\,(a+4)}$$

Reducimos los términos semejantes para tener el producto de la resta

$$\frac{a-4}{a^2-6a+9} - \frac{a+3}{a^2+a-12} = \frac{(a+4)\,(a-4) - (a-3)\,(a+3)}{(a-3)^2\,(a+4)} = \frac{a^2 - 16 - (a^2-9)}{(a-3)^2\,(a+4)}$$

$$= \frac{a^2 + 16 - a^2 + 9}{(a-3)^2\,(a+4)} = \frac{-7}{(a-3)^2\,(a+4)}$$

Actividad: en el cuaderno de prácticas resolvemos los siguientes problemas planteados.

A)	$\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{a-1} =$
B)	$\dfrac{1}{x+4} + \dfrac{1}{x-3} =$
C)	$\dfrac{m+3}{m-3} + \dfrac{m+2}{m-2} =$
D)	$\dfrac{2}{x-5} + \dfrac{3x}{x^2-25} =$
E)	$\dfrac{1}{x-4} - \dfrac{1}{x-3} =$
F)	$\dfrac{5}{20x}\,m + n - \dfrac{x-3y}{24y} =$
G)	$\dfrac{1}{2a} - \dfrac{2+b}{3ab} - \dfrac{5}{6a^2\,b2} =$
H)	$\dfrac{3}{5} - \dfrac{2a+1}{10a} - \dfrac{4a^2-1}{20a^2} =$

MULTIPLICACIÓN

Para multiplicar fracciones debemos tomar en cuenta:
- **Que se descomponen en factores, todo lo posible, los términos de las fracciones que se van a multiplicar.**
- **Que se simplifica, suprimiendo los factores comunes en los numeradores y denominadores.**
- **Que se multiplican entre si las expresiones que queden en los numeradores después de simplificar, y este producto se parte por el producto de las expresiones que queden en los denominadores.**
- **Que para multiplicar lo esencial es factorizar y simplificar.**

Ejercicios.

Resolvemos las multiplicaciones de fracciones:

b) $\dfrac{x+2}{x-1} \bullet \dfrac{3x+2}{x+2} =$

- Observamos si se puede factorizar, en caso de que no se pueda factorizamos tomamos toda la división como factores y simplificamos entre numeradores y denominadores.

$$\dfrac{\overset{(1)}{(x+2)}}{(x-1)} \bullet \dfrac{\cancel{(3x+2)}}{\underset{1}{\cancel{(x+2)}}} =$$

En la multiplicación podemos simplificar cualquiera del numerador y cualquiera del denominador.

- Después multiplicamos numeradores entre numeradores y denominadores entre denominadores y realizamos la simplificación, obteniendo el resultado.

$$\dfrac{(x+2)}{(x-1)} \bullet \dfrac{(3x+2)}{(x+2)} = \dfrac{1\,(3x+3)}{(x-1)\,1} = \dfrac{3x+3}{x-1}$$

b) $\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1} \bullet \dfrac{x^2+2x}{x^2+x-2}$

- Observamos si se puede factorizar, en caso de que se pueda lo factorizaremos con el caso de factorización que se requiera.

$$\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1} \bullet \dfrac{x^2+2x}{x^2+x-2} = \dfrac{(x+1)\,(x-1)}{(x+1)^2} \bullet \dfrac{x\,(x+2)}{(x+2)(x-1)} =$$

- Simplificamos todos los factores que sean posible.

$$\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1} \times \dfrac{x^2+2x}{x^2+x-2} = \dfrac{(\cancel{x}+1)\,(x-1)}{(\cancel{x}+1)^2} \times \dfrac{\cancel{x}\,(\cancel{x}+2)}{(\cancel{x}+2)(\cancel{x}-1)} =$$

En caso de que el factor este elevado al cuadrado simplificamos solo el exponente

- Multiplicamos numeradores con numeradores y denominadores con denominadores y resolvemos la multiplicación.

$$\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1} \bullet \dfrac{x^2+2x}{x^2+x-2} = \dfrac{\cancel{(x+1)}\,\cancel{(x-1)}}{(x+1)^{\cancel{2}}} \bullet \dfrac{x\,\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x-1)} = \dfrac{x}{x+1}$$

Actividad: en el cuaderno de prácticas resolvemos los siguientes problemas planteados.

A)	$\frac{2a^2}{3b} \bullet \frac{6b^2}{4a} =$
B)	$\frac{2x^2 + x}{6} \bullet \frac{8}{4x + 2} =$
C)	$\frac{5x + 25}{14} \bullet \frac{7x + 7}{10x + 50} =$
D)	$\frac{5x^2}{7y^2} \bullet \frac{4y^2}{7m^3} \bullet \frac{14m}{5x^4} =$

DIVISIÓN

- **Se multiplica el dividendo por el divisor invertido.**
- **La división es la inversa de la multiplicación.**

Ejercicios:

Resolvemos las divisiones de fracciones:

$$\frac{a^2 - 6a + 5}{a^2 - 15a + 56} \div \frac{a^2 + 2a - 35}{a^2 - 5a - 24} =$$

- Observamos si se puede factorizar, en caso de que se pueda, cada termino lo factorizaremos de acuerdo al caso de factorización necesario.

$$\frac{a^2 - 6a + 5}{a^2 - 15a + 56} \div \frac{a^2 + 2a - 35}{a^2 - 5a - 24} = \frac{(a-5)(a-1)}{(a-8)(a-7)} \div \frac{(a+7)(a-5)}{(a-8)(a+3)} =$$

- Para la división debemos de multiplicar en forma cruzada los numeradores con los denominadores.

$$\frac{a^2 - 6a + 5}{a^2 - 15a + 56} \div \frac{a^2 + 2a - 35}{a^2 - 5a - 24} = \frac{(a-5)(a-1)}{(a-8)(a-7)} \div \frac{(a+7)(a-5)}{(a-8)(a+3)} =$$

$$\frac{(a-5)(a-1)(a-8)(a+3)}{(a-8)(a+7)(a+7)(a-5)} = \frac{(a-1)(a+3)}{(a+7)(a+7)} = \frac{(a-1)(a+3)}{(a+7)^2}$$

Este es el resultado pero si queremos aún podemos resolver la multiplicación.

Actividad: En el cuaderno de prácticas resolvemos los siguientes problemas planteados.

A)	$\frac{a^2}{3b^2} \div \frac{2x}{b^3} =$
B)	$\frac{x-1}{3} \div \frac{2x-2}{6} =$
C)	$\frac{1}{a^2-a-30} \div \frac{2}{a^2+a-42} =$
D)	$\frac{20x^2-30x}{15x^3+15x^2} \div \frac{4x-6}{x-1} =$

Reflexionamos sobre la aplicabilidad de las fracciones algebraicas en la vida cotidiana

¿Qué significado relevante tiene conocer las fracciones algebraicas para tu vida? Demos un ejemplo con la utilidad de las fracciones algebraicas.

R.- ....

....

....

....

....

....

¿En comparación con las fracciones numéricas, consideras que es importante conocer la aplicabilidad de las fracciones algebraicas?

R.- ....

....

....

....

....

Vamos a la producción

Exploramos el concepto de fracciones algebraicas y organizamos equipos de trabajo para diseñar problemas relacionados con situaciones de la vida diaria en los que aplicamos fracciones algebraicas. Luego, compartimos videos explicativos sobre la resolución de estos problemas en plataformas como YouTube o TikTok y compartimos los enlaces correspondientes con los compañeros de clase.

Bibliografía

Acnomonge, J. (2017) "Factorización para completar el trimonio cuadrado perfecto por adición y sustracción", Pearson.

Baldor, A. (2002). "Algebra", México: publicaciones cultural.

Duval, R. (1988). "Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros". Traducción del Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN, México.

Ritchhart, R. Church, M. & Morrison, K. (2014). "Hacer visible el pensamiento. Cómo promover el compromiso, la comprensión y la autonomía de los estudiantes". Buenos Aires: Paidós.

Ruiz, M., Meneses, A. & Montenegro, M. (2013). "Calidad de textos escolares para aprender ciencias: habilidades, contenidos y lenguaje académico", Santiago.

Baldor, Aurelio (2010). "Álgebra (1ra Edición)". Lima, Perú: W.Q. EDITORES S.A.C.

Chavez Reyes, Carmen y Leon Quintanar, Adriana (2003). "La Biblia de las Matemáticas", Editorial Letrarte S.A, México D.F, impreso por I. Gráficas Mármol S.L España.

Guarin Avellaneda, Luís (1987). "Matemática y Física I", Editorial Printer Colombiana Ltda., Bogotá – Colombia.

Quijano Hiyo, Jorge (1995). "Algebra – Teoría y Problemas", Tomo I, Segunda edición, Talleres gráficos de Editora Kano, Lima – Perú.

Postigo, Luis (1983). "Matemáticas", Editorial Ramón Sopena S.A., Barcelona – España.

Oliveros, E. (2003). “Textos de geometría básica”. Tomo I. Quito, Ecuador: Grupo Editorial AGFEM.

Paulín, J. (1993). “Álgebra, la matemática como una forma de pensar”. México D. F., México: McGraw Hill.

Villon Bejar Máximo (2005) ÁLGEBRA Tomo 1 y ALGEBRA Tomo 2, , Ed. Villon Bejar, Perú.

ESTADO PLURINACIONAL DE
BOLIVIA

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

VICEMINISTERIO DE
EDUCACIÓN ALTERNATIVA Y
ESPECIAL

minedu.gob.bo @minedubol minedu_bol

Av. Arce No. 2147 - Teléfonos: (591 -2) 2442144 - 2681200
La Paz - Bolivia