BICENTENARIO DE
BOLIVIA

ESTADO PLURINACIONAL DE
BOLIVIA

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

MATEMÁTICA

APRENDIZAJES ESPECIALIZADOS

EDUCACIÓN SECUNDARIA DE PERSONAS JÓVENES Y ADULTAS

GUÍA DE TRABAJO

VICEMINISTERIO DE EDUCACIÓN ALTERNATIVA Y ESPECIAL
DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN ALTERNATIVA

MINISTERIO DE EDUCACIÓN
GUÍA DE TRABAJO APRENDIZAJES ESPECIALIZADOS - MATEMÁTICA
EDUCACIÓN DE PERSONAS JÓVENES Y ADULTAS

Edgar Pary Chambi
MINISTRO DE EDUCACIÓN

Viviana Mamani Laura
VICEMINISTRA DE EDUCACIÓN ALTERNATIVA Y ESPECIAL

Ximena Aguirre Calamani
DIRECTORA GENERAL DE EDUCACIÓN ALTERNATIVA

EDICIÓN, DISEÑO E ILUSTRACIÓN:
Viceministerio de Educación Alternativa y Especial
Dirección General de Educación Alternativa

Cómo citar este documento:
Ministerio de Educación. "Matemática - Guía de trabajo, Aprendizajes especializados". La Paz, Bolivia.

Depósito legal:
4 - 1 - 351 - 2023 P.O.

Impresión:
EDITORIAL DEL ESTADO PLURINACIONAL DE BOLIVIA

Av. Arce, Nro. 2147
www.minedu.gob.bo

Índice

Presentación	1
Orientaciones para uso de la guía de trabajo	3
Módulo 1: Trigonometría	5
Objetivo holístico del módulo	5
Unidad temática N.º 1: Introducción a la trigonometría	5
Sistemas de ángulos y conversiones	7
Funciones trigonométricas	11
Círculo trigonométrico	13
Trigonometría aplicada a la vida y al trabajo	16
Unidad temática N.º 2: Resolución de triángulos	16
Teorema de Pitágoras	25
Demostración geométrica del teorema de Pitágoras	26
Triángulos rectángulos	27
Planteamiento y resolución de problemas con el teorema de Pitágoras	30
Triángulos oblicuángulos	32
Problemas de aplicación	36
Medidas de terrenos inclinados, de difícil acceso y otros	38
Unidad temática N.º 3: Identidades y ecuaciones	45
Identidades trigonométricas	49
Ecuaciones trigonométricas	54
Unidad temática N.º 4: Geometría plana y analítica	60
Geometría	60
Perímetros	66

Áreas de figuras geométricas	69
Geometría analítica	74
Distancia entre dos puntos	80
Geometría analítica	90
Bibliografía	94

Presentación

Con el objetivo de garantizar una educación de calidad en los procesos de aprendizaje, el Ministerio de Educación del Estado Plurinacional de Bolivia, a través del Viceministerio de Educación Alternativa y Especial y la Dirección General de Educación de Alternativa, proporciona valiosos recursos educativos destinados a la formación de Personas Jóvenes y Adultas en el presente periodo.

Es fundamental tener en cuenta que las Personas Jóvenes y Adultas desempeñan un papel activo en los cambios sociales. Por este motivo, la Educación Alternativa les brinda oportunidades de formación y capacitación que les permiten acceder al conocimiento en diversos campos de saberes. Esto implica una formación permanente, continua y equitativa, enmarcada en el concepto filosófico del Vivir Bien.

Los materiales educativos que se presentan en este contexto tienen un enfoque inclusivo y están diseñados para atender la diversidad de características de los estudiantes/participantes. Han sido elaborados siguiendo las orientaciones del currículo, con el propósito de lograr una formación integral que abarque las dimensiones del ser, saber, hacer y decidir. Además, se consideran los objetivos holísticos, los momentos metodológicos y la evaluación, teniendo en cuenta los diferentes contextos y modalidades de atención del Sistema Educativo Plurinacional. Todo esto se encuentra en línea con el Modelo Educativo Sociocomunitario Productivo establecido en la Ley de Educación N° 070 "Avelino Siñani – Elizardo Pérez".

Es importante resaltar que esta guía de trabajo no sigue el formato tradicional de un texto de aprendizaje, sino que tiene un enfoque orientador. Su propósito es promover el autoaprendizaje y la autonomía de los participantes. Asimismo, plantea procesos educativos flexibles que se adaptan a la diversidad cultural y a las múltiples ocupaciones de los participantes. Utiliza una variedad de recursos educativos como videos, textos de apoyo, entre otros, con el fin de fortalecer el aprendizaje de los participantes.

Estimados estudiantes/participantes y comunidad en general, los invitamos a formar parte de la Educación Alternativa y a continuar con una formación integral, tanto humanística como técnica. Esto nos permitirá avanzar juntos por una educación de calidad rumbo al Bicentenario.

Edgar Pary Chambi
Ministro de Educación

Orientaciones para uso de la guía de trabajo

Para aprovechar al máximo esta guía y lograr el desarrollo de las actividades propuestas, utilizamos la siguiente iconografía que indica el inicio de los momentos metodológicos y las actividades correspondientes.

Objetivo holístico: orienta el proceso formativo articulado a las dimensiones Ser, Saber, Hacer y Decidir.

Práctica: indagamos conocimientos previos a partir de nuestra experiencia y realidad antes de abordar los contenidos.

Teoría: manejamos y comprendemos conceptos y categorías, que posibiliten profundizar el debate que te propone cada Unidad Temática.

Valoración: nos apropiamos de criterios que nos permitan profundizar en nuestra reflexión y análisis de la realidad a partir de los contenidos.

Producción: promovemos la aplicación creativa del conocimiento, donde los participantes compartirán los resultados de su proceso formativo.

Actividades: desarrollamos actividades que incluyan consignas concretas y precisas que faciliten la internalización de los conocimientos adquiridos.

Escanear código QR: nos invita a explorar temáticas complementarias a los contenidos desarrollados. Al escanearlo, podremos acceder a una variedad de recursos audiovisuales.

Módulo 1:

Trigonometría

Objetivo holístico del módulo

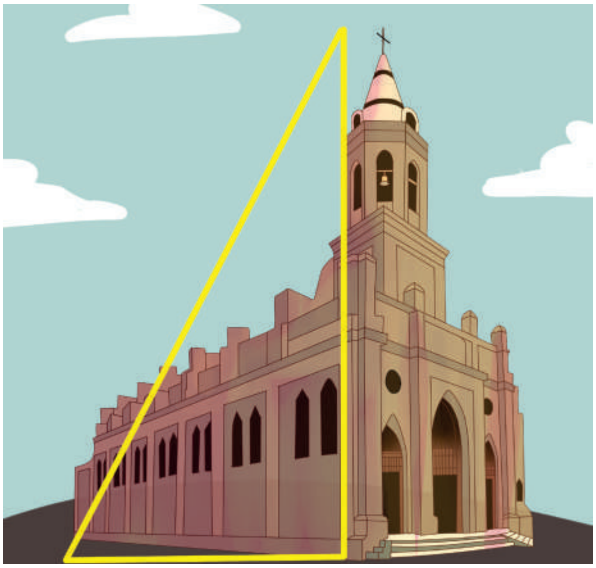
Promovemos valores de reciprocidad y respeto a la Madre Tierra a través del estudio e investigación de la trigonometría aplicados a la solución de problemas productivos para aportar a la soberanía tecnológica y la consolidación del Estado Plurinacional.

Unidad temática N.º 1:

Introducción a la trigonometría

Partamos de nuestra experiencia

ACTIVIDAD 1. Observemos la siguiente imagen y respondemos a las preguntas planteadas:



¿Observando la imagen, crees que se puede calcular la altura de la catedral?

¿Cómo podrías calcular la altura? ¿Qué herramientas utilizarías?

¿Ese triángulo marcado en la imagen te ayudaría de alguna manera?

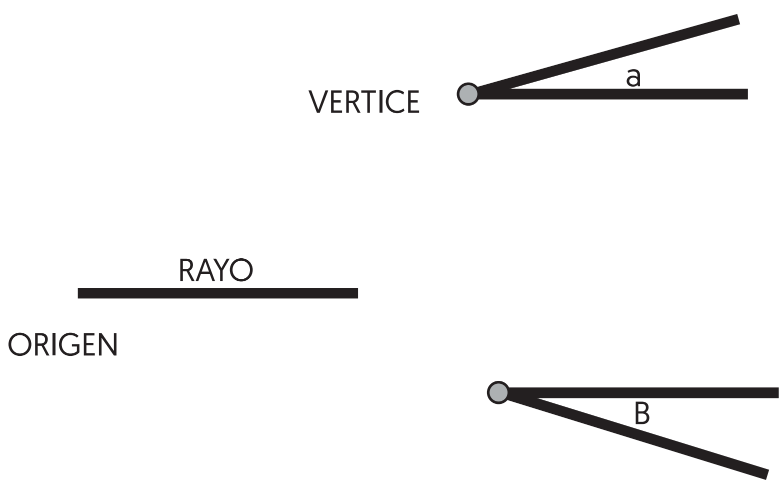
¿Qué es la trigonometría?

Profundicemos nuestros saberes y conocimientos

La trigonometría estudia las medidas de los lados y ángulos de un triángulo, como también la relación entre ellos, es decir las funciones trigonométricas.

Para empezar este tema debemos tener claro el concepto de:

Ángulo trigonométrico



Si el rayo gira en el sentido contrario de las agujas del reloj nuestro ángulo<< será positivo. (antihorario)

Si el rayo gira en el sentido de las agujas del reloj nuestro ángulo que se forma será negativo

Recordemos

Para medir longitudes se requiere una unidad de medida, en nuestro caso para medir el ángulo aplicaremos los siguientes sistemas de conversión.

Sistemas de ángulos y conversiones

SISTEMAS DE CONVERSIÓN	SEXAGESIMAL	Si el rayo mencionado gira una vuelta	360° grados sexagesimales
	CENTESIMAL	Si el rayo mencionado gira una vuelta	400° grados centecimales
	RADIAL	Si el rayo mencionado gira una vuelta	2π radianes

Ahora que hemos identificado las dimensiones del sistema de conversión, nos disponemos a iniciar el trabajo.

Convertir 20° a radianes

UNA VUELTA $360° = 400g = 2\pi rad$

Sexagesimal		**Radial**
360°	→	**2πrad**
18°	→	**X**

APLICAMOS REGLA DE TRES

$X= (18°*2\pi\ rad)/(360°)$

$X= (36°\pi\ rad)/(360°)$

$X= (\pi\ rad)/10$

$X= \pi/10\ \ rad$

Dado que hemos examinado el proceso de conversión, nos disponemos a llevar a cabo el trabajo.

Realicemos la conversión de los siguientes ejercicios:

Convertimos:

a) 15° a radianes

b) 30g a radianes

c) 45 rad a grados sexagesimales

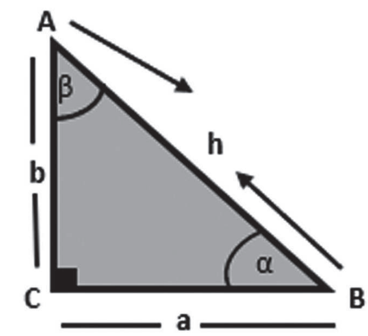
d) 60 grados centesimales a radianes

e) 75 radianes a grados centesimales

Recordemos:

Un triángulo tiene tres lados y 3 ángulos internos que sumados dan 180°
Tiene dos lados que se denominan catetos y un lado más largo que los otros que es la hipotenusa

Triángulos rectángulos



Características de un triángulo rectángulo

Tiene un ángulo recto =90°

Cumple el teorema de Pitágoras

$$h^2 = a^2+b^2$$

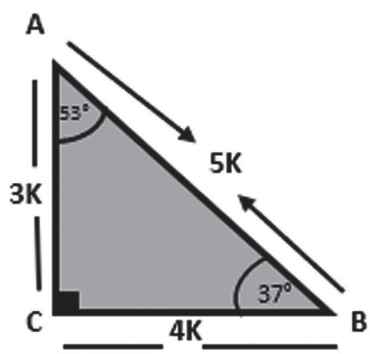
$\alpha+\beta+90°=180°$ (la suma de los ángulos es 180°)

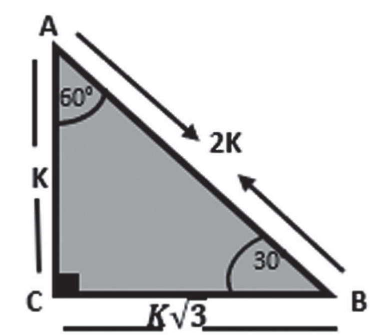
$\alpha+\beta=180°-90°$

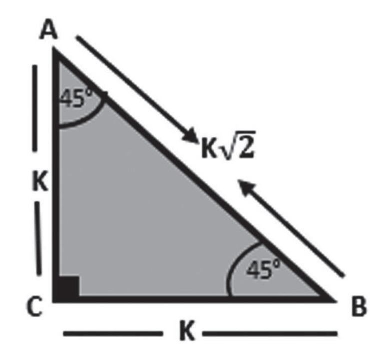
$\alpha+\beta=90°$ (ángulos complementarios)

Triángulos rectángulos notables

Observemos los gráficos de los triángulos notables y describimos sus características de cada uno en los cuadros.







Una vez que analizamos los triángulos notables, hallemos la medida de sus lados de los 3 triángulos considerando los valores de k:

1.- K= 1

2.- K=3

3.- K= 6

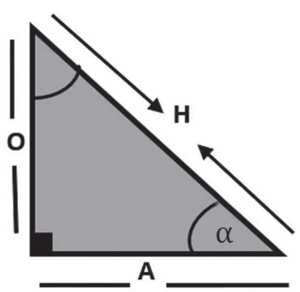
4.- K=11

5.- K=15

Funciones trigonométricas

Recordemos:
Después de completar la actividad anterior, podremos mejorar nuestra comprensión y aplicación de las funciones trigonométricas, teniendo en cuenta también los conceptos abordados en la última parte de la unidad temática 1.

Funciones trigonométricas



SENO	COSENO	TANGENTE
$\frac{CATETO\ OPUESTO}{HIPOTENUSA}$	$\frac{CATETO\ ADYACENTE}{HIPOTENUSA}$	$\frac{CATETO\ OPUESTO}{CATETO\ ADYACENTE}$
sen $\alpha=\frac{O}{H}$	cos $\alpha=\frac{A}{H}$	tan $\alpha=\frac{O}{A}$

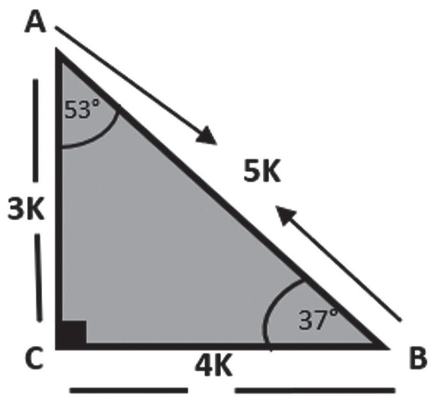
Funciones trigonométricas recíprocas

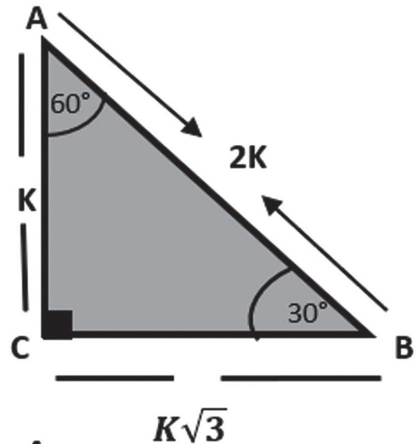
csc $\alpha=\frac{H}{O}$	sec $\alpha=\frac{A}{H}$	cot $\alpha=\frac{A}{O}$

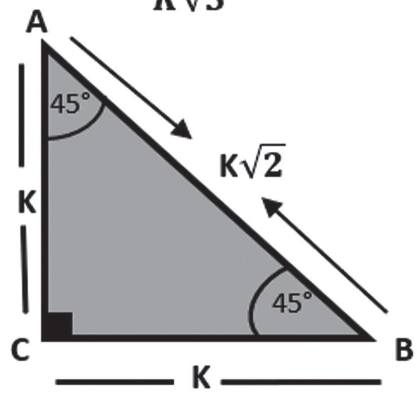
ACTIVIDAD 2. Considerando la información proporcionada en la tabla previa, abordaremos la siguiente interrogante:

¿Qué conclusiones podemos determinar de las funciones trigonométricas recíprocas?

ACTIVIDAD 3. Tomando en cuenta las actividades anteriores, calculamos las 6 razones trigonométricas de los tres triángulos rectángulos notables



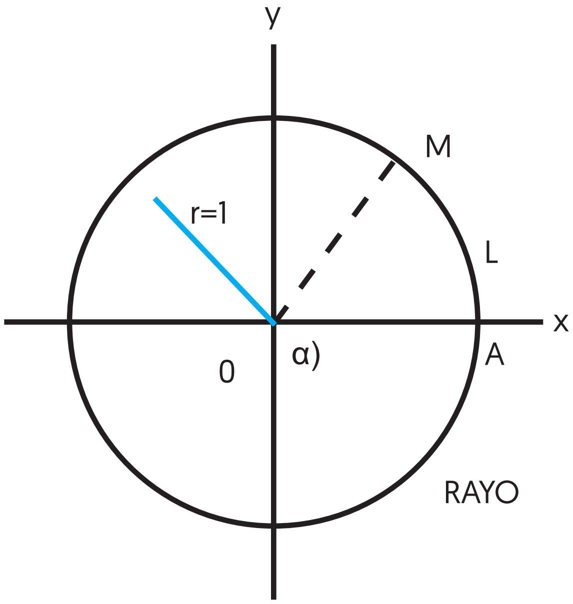




ACTIVIDAD 4. Basándonos en la solución de la actividad 3, estructuremos en nuestros cuadernos los resultados de las funciones trigonométricas en forma tabular y elaboremos las conclusiones con la asistencia del docente en relación con dichos resultados.

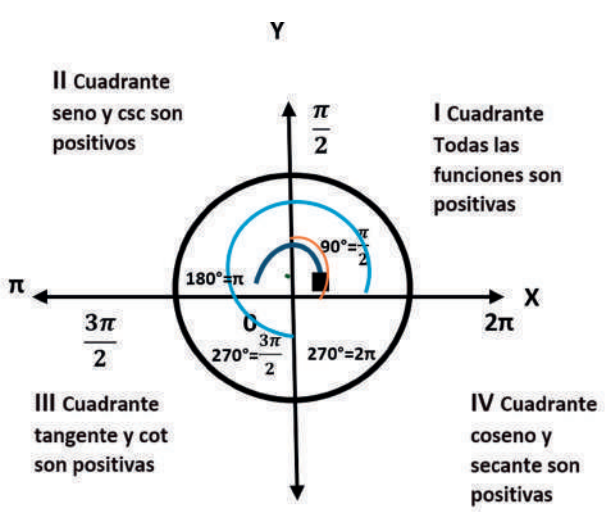
Círculo trigonométrico

CENTRO EN EL ORIGEN Y RADIO IGUAL A 1



A= origen del arco
M= extremo del arco
Longitud del arco= ángulo central*1
L= α*1
L=α
$X^2 + y^2 = 1$
$1^2+0=1$

Actividad 1. Observemos el gráfico de la circunferencia y completemos los cuadros respectivos:



En el primer cuadrante el ángulo central = a su arco= $\frac{\pi}{2}$ radianes

En el primer cuadrante todas las funciones trigonométricas son positivas

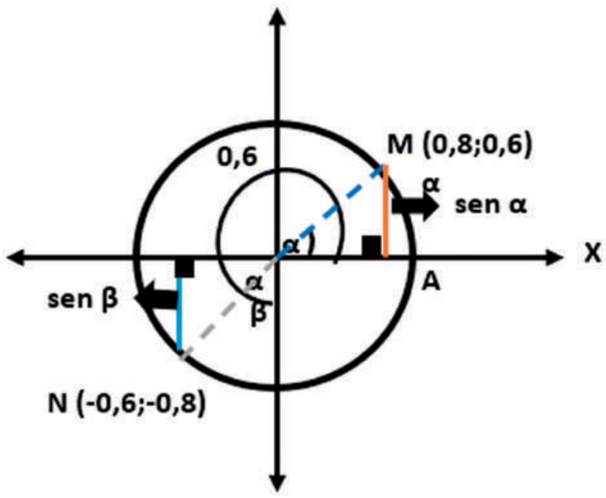
Trazamos las líneas trigonométricas en la circunferencia.

Centro en el origen y radio igual a 1.

APRENDIZAJES ESPECIALIZADOS - MATEMÁTICA

Actividad 2. Observemos el gráfico de la circunferencia y completa los cuadros respectivos:

SENO

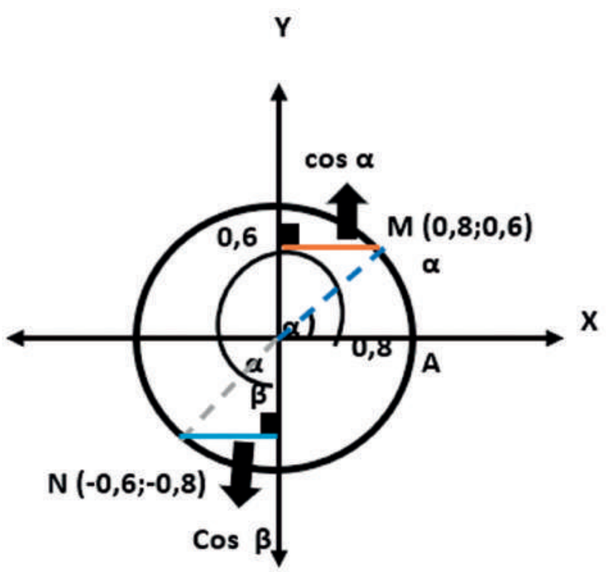


Para hallar el valor del arco de α se debe trazar una perpendicular al eje "x" desde el extremo final del arco: por ejemplo:

Sen α= 0,6

Sen β =-0,8

COSENO

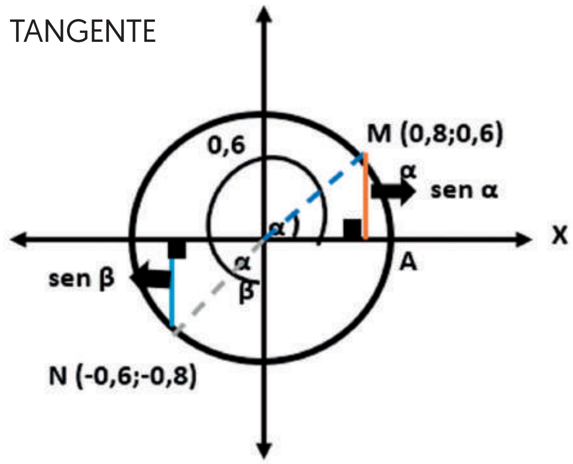


Para hallar el valor del arco de α se debe trazar una perpendicular al eje "y" desde el extremo final del arco: por ejemplo:

cos α= 0,8

cos β =-0,6

TANGENTE

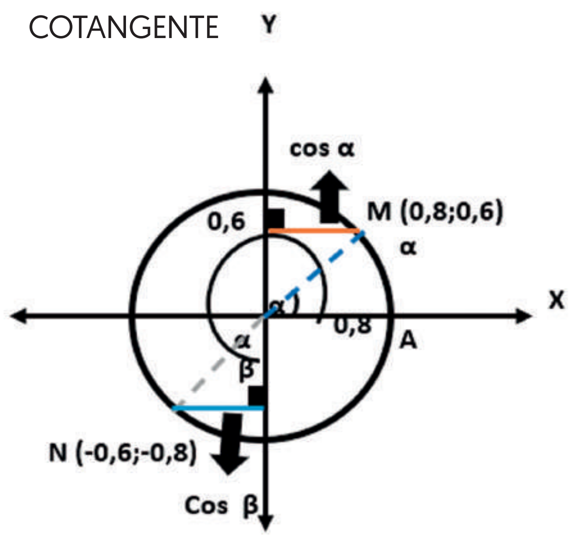


Para hallar el valor del arco de α se debe trazar una perpendicular al eje “x” siendo tangente al círculo trigonométrico: Por ejemplo:

tan α= AM

tan β =AP1

COTANGENTE



Para hallar el valor del arco de α se debe trazar una perpendicular al eje “y” siendo tangente al círculo trigonométrico: Por ejemplo:

cot α= AM

cot β =AP

Actividad 3. Tomando en cuenta todos los trazos de las líneas trigonométricas, resolvamos los siguientes ejercicios:

Señalemos si es verdadero o falso las siguientes relaciones:

1.- Sen 25°>sen 75°

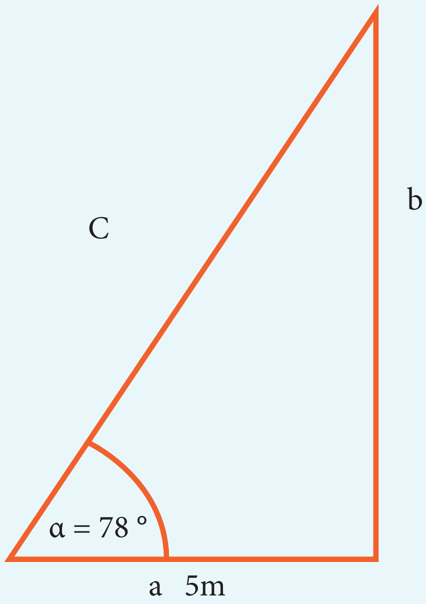
2.- cos 25° <cos 75°

3.- tan 25° < tan 75°

4.- cos 50° < cos 30°

Trigonometría aplicada a la vida y al trabajo

Tomando en cuenta lo avanzado calculamos la altura de la catedral de Cochabamba.



DATOS:

α= 78°

a= 5m   podemos aplicar:

$\tan \propto \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$

α= 78°

$\tan 78° = \frac{b}{a}$

$\tan 78° = \frac{b}{5}$ $4.70 = \frac{b}{5}$ b=23.52 m

La altura aproximada de la catedral es de 23.52 metros

Ahora que ya conocemos las funciones trigonométricas, calculemos la altura de la catedral tomando en cuenta ese triángulo rectángulo que esta trazado en la imagen.

DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN ALTERNATIVA

Valoramos nuestros conocimientos adquiridos

Con todo lo aprendido respondamos a las siguientes preguntas:

Describamos 2 ejemplos donde se utilice la trigonometría en nuestra vida diaria.

....

Mencionemos que dificultades hemos tenido durante el desarrollo de las diferentes actividades.

....

Apliquemos lo aprendido

Resolvamos con la ayuda del docente el siguiente problema:

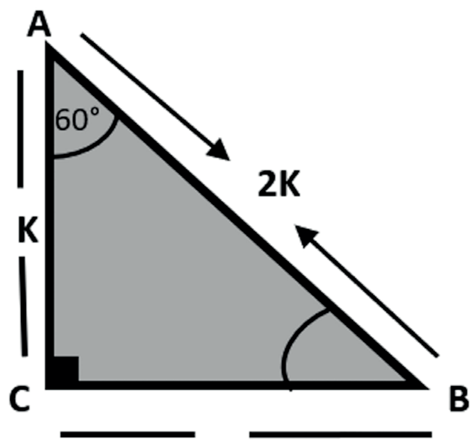
Samuel Rojas es cerrajero y quiere construir una escalera tijera, donde los brazos de la escalera al abrir forman un ángulo de 60°, si la altura de la escalera es de 2 m, necesita saber ¿cuánto será la medida de cada brazo?

Realicemos la siguiente actividad

1.- Realicemos las siguientes conversiones:

a) Convertir 50° a radianes.
b) Convertir 60 radianes a grados sexagesimales.
c) Convertir 90 ° a radianes.

2.- Completa los datos en el siguiente triangulo e indica las razones trigonométricas.



3. En que cuadrante el seno y cosecante son positivos, demuestra gráficamente.

Unidad temática N.º 2:

Resolución de triángulos

Partamos de nuestra experiencia

Julián y Pedro deben realizar el podado de un árbol del jardín del centro educativo, que creció muy alto. Para no dañar las aulas requieren una escalera que se apoye al árbol para realizar primero el corte por las puntas el cual está a unos 8 metros de altura. Si una escalera requiere estar apoyada entre 2 metros de distancia para una mejor comodidad del que realizará el podado. ¿Cuántos metros de escalera requieren conseguir?

Actividad

¿Qué utilidad tiene el saber adecuar el teorema de Pitágoras a situaciones reales?

¿Por qué es necesario conocer despeje de variables?

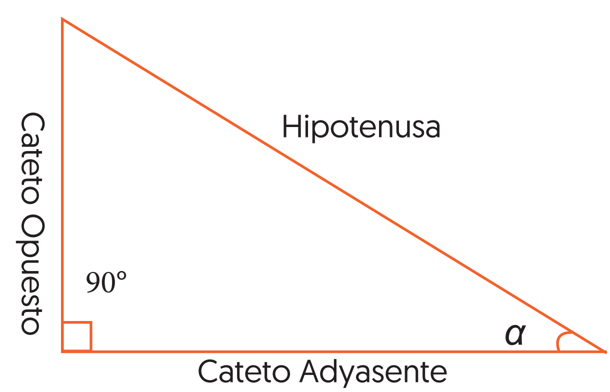
¿Cómo esto ayuda a responder y calcular medidas que requieres al momento de pretender responder un problema o necesidad?

¿A quiénes los favorece conocer este tema?

Profundicemos nuestros saberes y conocimientos

De esta manera nos adentramos a conocer la trigonometría para poder utilizarlo en el cálculo de alturas, por ejemplo:

Empecemos a estudiar los
LADOS DE UN
TRIÁNGULO.
Cada lado tiene nombre
de
acuerdo al ángulo α

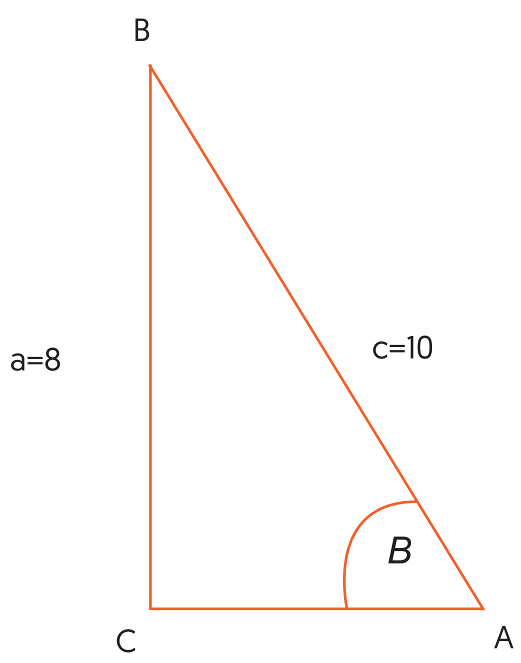


Empecemos a estudiar los
LADOS DE UN
TRIÁNGULO.
Cada lado tiene nombre
de
acuerdo al ángulo α

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS	FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS RECÍPROCAS
$\text{Sen } \alpha = \dfrac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} \Longrightarrow \text{sen}\alpha \dfrac{a}{c}$	$\text{Csc } \alpha = \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Opuesto}} \Longrightarrow \text{csc}\alpha \dfrac{c}{a}$
$\text{Cos } \alpha = \dfrac{\text{Cateto Adyasente}}{\text{Hipotenusa}} \Longrightarrow \text{cos}\alpha \dfrac{b}{c}$	$\text{Sec } \alpha = \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Adyasente}} \Longrightarrow \text{sec}\alpha \dfrac{c}{b}$
$\text{Tag } \alpha = \dfrac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}} \Longrightarrow \text{tag}\alpha \dfrac{a}{b}$	$\text{Cotag } \alpha = \dfrac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Cateto Opuesto}} \Longrightarrow \text{cotag}\alpha \dfrac{b}{a}$

Ahora vamos a trabajar

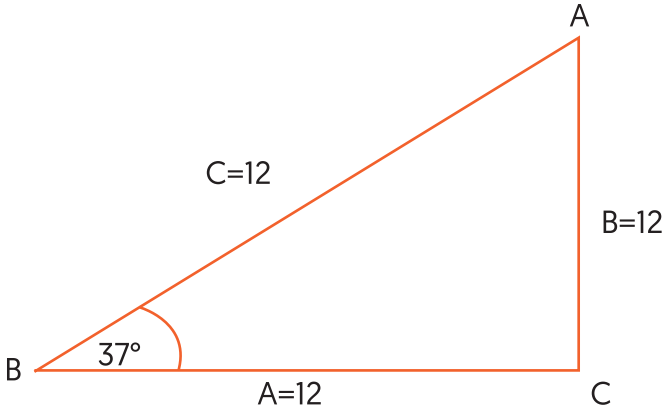
Ejemplo 1:



Tomando en cuenta el triángulo que se observa llenamos los datos faltantes.

Ahora reemplazamos con las letras de cada lado:	Y para terminar reemplazamos con el valor numérico de cada lado:
$sen\beta =$	$sen\beta =$
$cos\beta =$	$cos\beta =$
$tag\beta =$	$tag\beta =$

Ejemplo 2



Ahora reemplazamos con las letras de cada lado:	Y para terminar reemplazamos con el valor numérico de cada lado:
$sen\beta =$	$sen\beta =$
$cos\beta =$	$cos\beta =$
$tag\beta =$	$tag\beta =$

Realicemos la siguiente actividad:

En nuestro diario vivir, hemos estado utilizando los ángulos muchas veces, pero no nos dábamos cuenta. Ahí tenemos que entender que la matemática siempre está en nuestro entorno y que necesitamos comprenderla.

¿En qué actividades has utilizado los triángulos o los ángulos? Escribe en la siguiente lista:

1	2
3	4
5	6

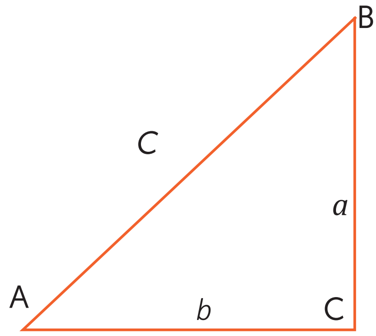
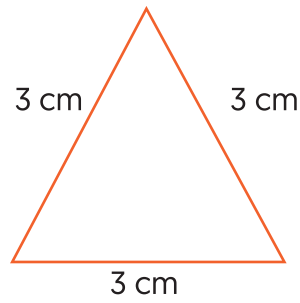
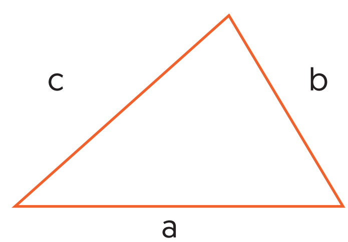
Resolución de triángulos

Antes de empezar a estudiar el Teorema de Pitágoras, vamos a responder las siguientes preguntas:

1. ¿Qué conocemos sobre Pitágoras de Samo?
R ....
....

2. ¿Qué es la hipotenusa?
R ....
....

3. ¿Qué son los catetos?
R ....
....

Un ángulo es 90º		
Todos los lados son iguales		
Un ángulo es mayor a 90º		

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras solo es aplicable en los triángulos rectángulos.

Si ABC es un triángulo rectángulo entonces el cuadrado de la hipotenusa (c) es igual al cuadrado de la suma de los catetos, siendo los catetos a y b.

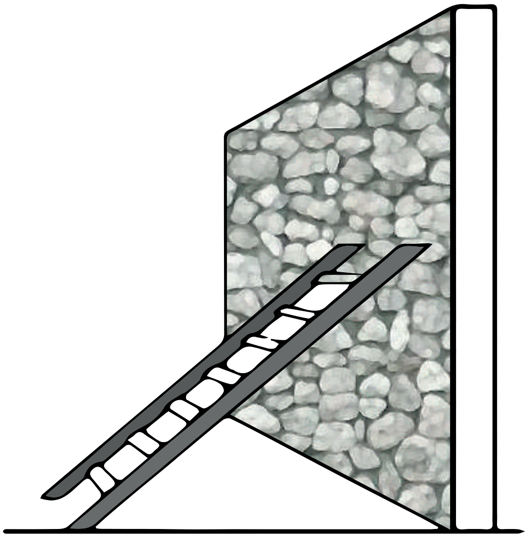
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Demostración geométrica del teorema de Pitágoras

El Teorema de Pitágoras proporciona un método poderoso para abordar problemas geométricos que involucran triángulos rectángulos. Este teorema, que establece la relación entre los lados de un triángulo rectángulo, se convierte en una herramienta esencial para resolver problemas en diversas disciplinas.

Planteamiento de problemas:

Supongamos que estamos frente a un problema geométrico en el cual se nos presenta un triángulo rectángulo con ciertos lados conocidos y se nos pide encontrar la longitud de un lado desconocido. Para ilustrar esto, consideremos un escenario común en el que estamos tratando con las dimensiones de una escalera apoyada contra una pared.



Ejemplo 1:

Tenemos una escalera que descansa contra una pared. Sabemos que la base de la escalera mide 6 metros y la altura desde la base hasta la parte superior de la escalera (en la pared) es de 8 metros. ¿Cuál es la longitud de la escalera?

Resolución del problema:

La primera tarea es identificar el triángulo rectángulo en el problema. En este caso, la escalera forma un triángulo rectángulo con la pared y el suelo. Etiquetemos los lados del triángulo como a, b y c, siendo "c" la hipotenusa, la longitud de la escalera.

a= 6m(base de la escalera)
b= 8m (altura en la pared)

Ahora, aplicamos el Teorema de Pitágoras:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10\,\mathrm{m}$$

Por lo tanto, la longitud de la escalera es de 10 metros.

Este ejemplo ilustra cómo el Teorema de Pitágoras se utiliza para resolver problemas del mundo real, proporcionando una herramienta esencial para determinar distancias y dimensiones en situaciones prácticas.

Triángulos rectángulos

Resolver un triángulo rectángulo es conocer sus elementos, tres lados y dos ángulos agudos puesto que un ángulo es recto. Dados como datos, por lo menos un lado.

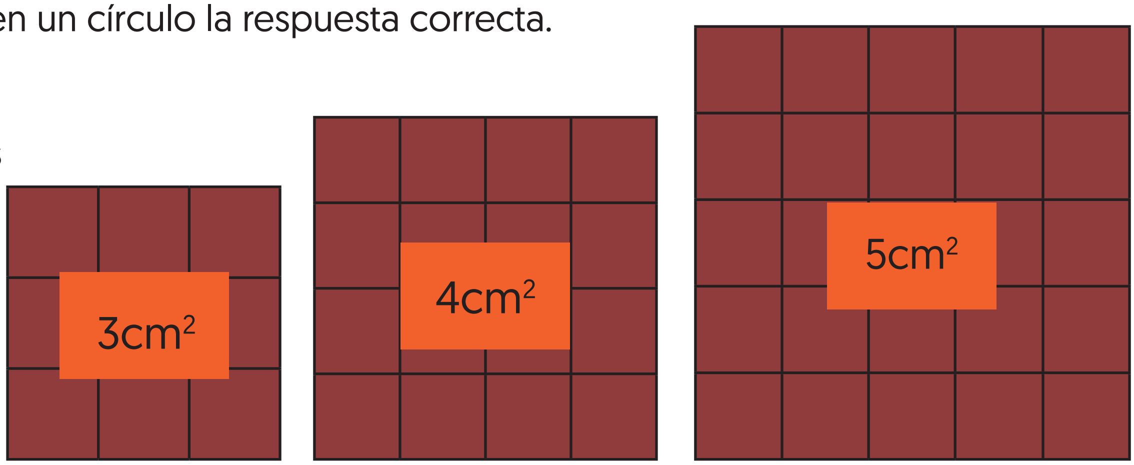
Para encontrar el lado c	Para encontrar el lado a	Para encontrar el lado b
$c = \sqrt{a^2+b^2}$	$a = \sqrt{c^2-b^2}$	$b = \sqrt{c^2-a^2}$

Explicación del teorema

Mario y Mary, van a la tienda a comprar chocolates, Mario compra solo un chocolate de $5cm^2$, en cambio Mary compra dos chocolates de $3cm^2$ y $4cm^2$

¿Quién tiene más chocolate?

Encierra en un círculo la respuesta correcta.
a) Mary
b) Mario
c) Iguales

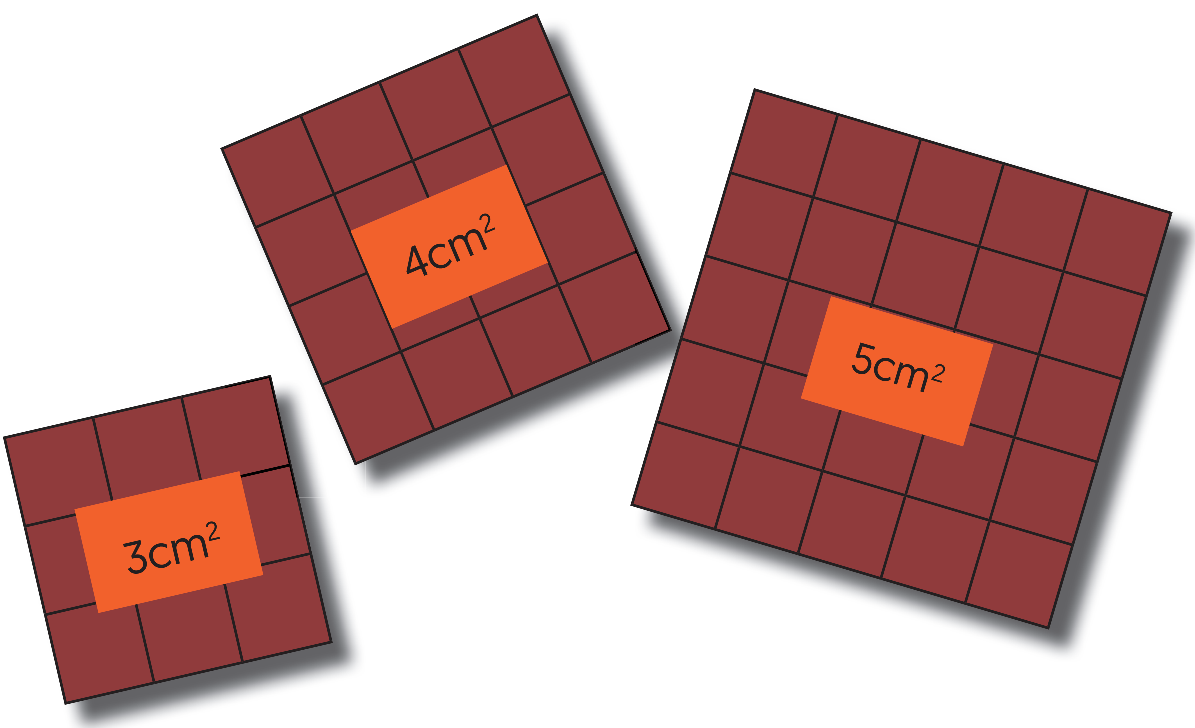


¿Cuántos chocolates tiene cada uno?

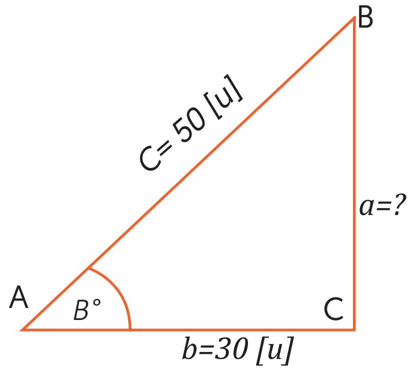
Mary	Mario

Resolución de Así demostramos el teorema de Pitágoras.

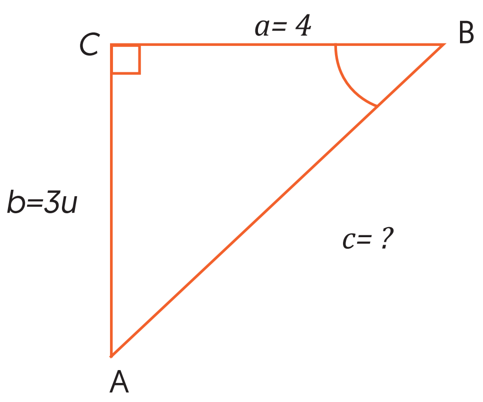
En todo triángulo rectángulo se
cumple que el
cuadrado de la HIPOTENUSA es
igual a la suma
de los cuadrados de los CATETOS



Ahora vamos a encontrar el lado que falta de algunos triángulos rectángulos.
Ejemplo 1. Encontramos el lado a del triángulo:

	Para encontrar uno de los lados uFlizaremos el teorema de Pitágoras, en este caso nos falta el lado a, entonces utlizaremos: $$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$
A la fórmula reemplazamos los valores de c y "b":	$a = \sqrt{50^2u^2 - 30u^2u^2}$
Resolvemos las potencias:	$a = \sqrt{2500u^2 - 900u^2}$
Restamos dentro de la raíz:	$a = \sqrt{1600u^2}$
Sacamos la raíz cuadrada de 1600:	$a = 40$ [u]

Entonces decimos que el lado "a" es igual a 40
El lado "c" llega a ser la HIPOTENUSA, por ser el lado con mayor medida o distancia.

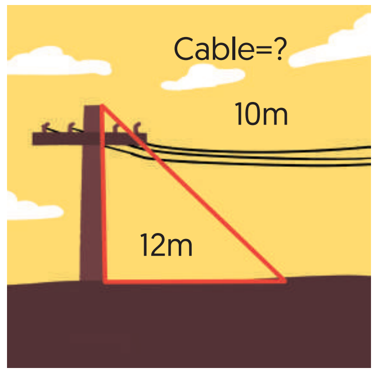
	Para encontrar uno de los lados uFlizaremos el teorema de Pitágoras, en este caso nos falta el lado a, entonces utlizaremos: $$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
A la fórmula reemplazamos los valores de a y "b":	$a = \sqrt{4^2u^2 - 3^2u^2}$
Resolvemos las potencias:	$a = \sqrt{16u^2 + 9u^2}$
Restamos dentro de la raíz:	$a = \sqrt{25u^2}$
Sacamos la raíz cuadrada de 25:	$a = 5$u

Planteamiento y resolución de problemas con el teorema de Pitágoras

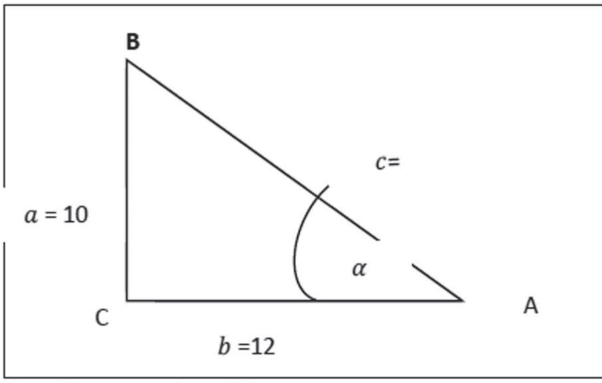
Tenemos un poste de energía eléctrica de 10 metros, y para que no se caiga queremos
poner un cable desde la punta del poste hasta 12 metros en el piso.

¿Cuántos metros de cable vamos a necesitar?

Ejemplo



Le asignamos letras a los lados, el lado más largo será **"c"** y a los restantes ponemos **"a"** y **"b"**.



$$c = \sqrt{a^2 \mathrm{m}^2 + b^2 \mathrm{m}^2}$$

$$c = \sqrt{10^2 \mathrm{m}^2 + 12^2 \mathrm{m}^2}$$

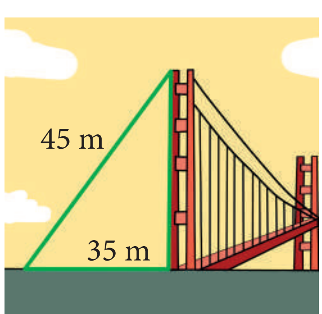
$$c = \sqrt{100\mathrm{m} + 144\mathrm{m}}$$

$$c = \sqrt{244\mathrm{m}^2}$$

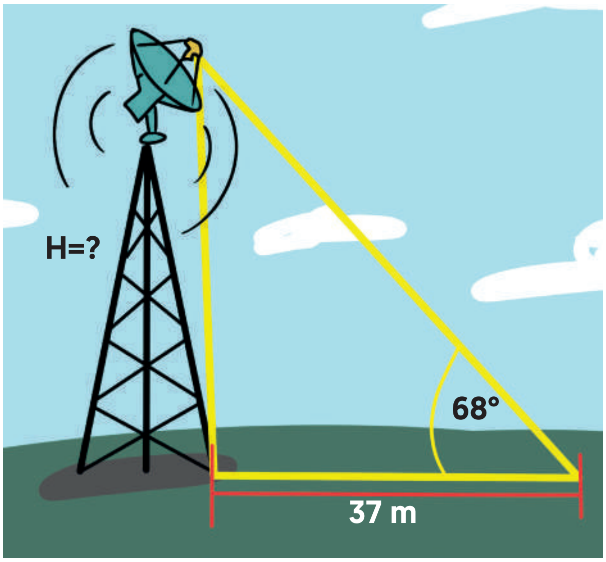
$$c = 15{,}6\mathrm{m}$$

Resolvemos el problema:

1) Queremos hallar la altura del machón de uno de los Puentes Trillizos, y desde la punta del machón del puente se jala un cable que mide 45 metros, desde la base del puente hasta el extremo del cable jalado hay una distancia de 35 metros. ¿Cuánto mide el machón del puente?

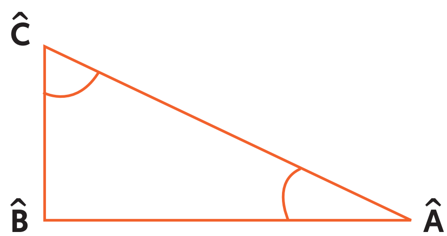


Ejemplo 2. Además, se quiere calcular la altura de la antena.



La teoría nos dice que:

La suma de los tres ángulos interiores en todo triángulo es igual a 180° grados, esto quiere decir que si sumamos los 3 ángulos nos tiene que dar 180°

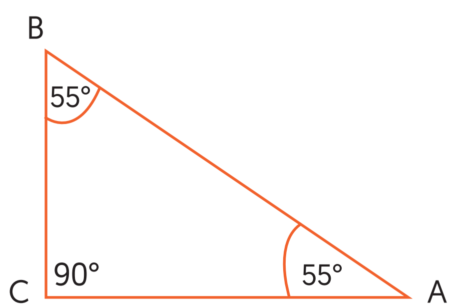


$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$$

Para Encontrar el ángulo A	Para Encontrar el ángulo B	Para Encontrar el ángulo C
$\hat{A} = 180° - \hat{B} - \hat{C}$	$\hat{B} = 180° - \hat{A} - \hat{C}$	$\hat{C} = 180 - \hat{A} - \hat{B}$

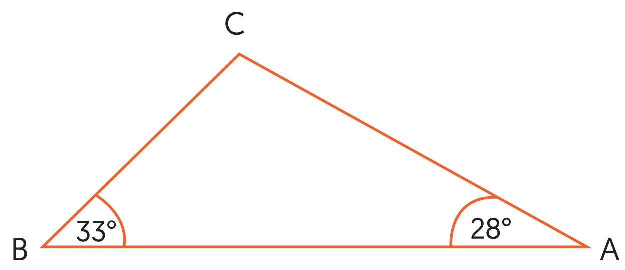
Ahora vamos a sumar algunos ángulos interiores:

Ejemplo: Vamos a comprobar si en verdad la suma de los ángulos es de 180°.



La suma de ángulos interiores dice:	$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$
Remplazando los ángulos Tenemos	$55° + 35° + 90° = 180°$
Sumamos los tres ángulos:	$180° = 180°$
Hemos visto que, si sumamos los tres ángulos del triángulo nos da 180°	

Ejemplo: Ahora vamos a encontrar el ángulo que falta en este triángulo no se conoce el ángulo C.



La suma de ángulos interiores dice:	$C = 180° - \hat{A} - \hat{B}$
Remplazando los ángulos Tenemos	
Sumamos los tres ángulos:	

Triángulos oblicuángulos

Para resolver triángulos oblicuángulos vamos a utilizar los teoremas del Seno y del Coseno. Dependiendo de los elementos que conozcamos, nos encontramos con cuatro tipos de resolución de triángulos oblicuángulos.

Un triángulo queda perfectamente determinado cuando se conocen tres datos cualesquiera de sus elementos.

Teorema de senos

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

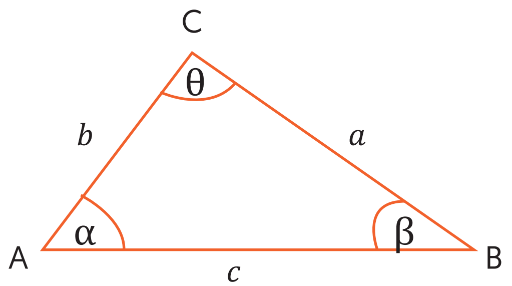
$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\theta}$$

En todo triangulo los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos, sea el triángulo ABC.

DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN ALTERNATIVA

Ejemplo 3.

Resolver un triángulo conociendo un lado y 2 ángulos adyacentes



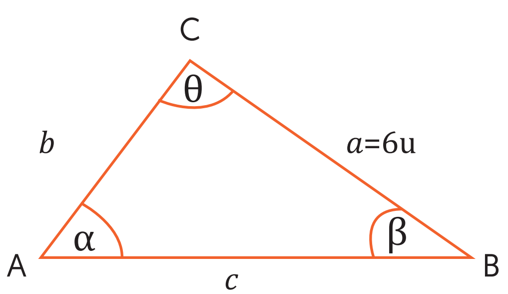
$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} \rightarrow b = a * \frac{sen\beta}{sen\alpha}$$

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} \rightarrow c = a * \frac{sen\theta}{sen\alpha}$$

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} \rightarrow b = a * \frac{sen\beta}{sen\alpha}$$

Ejemplo 2.

De un triángulo sabemos que

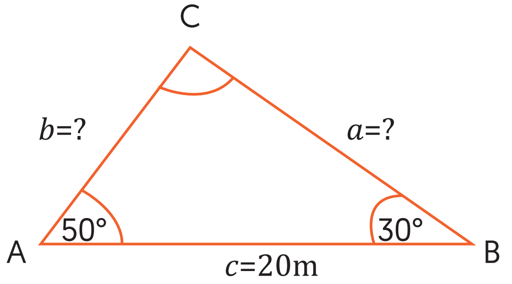


Datos	Incógnitas
$\alpha = 48°$	θ
$\beta = 35°$	b
a= 6 [u]	c

$\theta = 180° - \alpha - \beta$ $\theta = 180° - 48° - 35°$ $\theta = 180° - 83°$ $\theta = 97°$	$\frac{b}{sen\beta} \quad \frac{b}{sen\alpha}$ $b = a * \frac{sen\beta}{sen\alpha}$ $b = 6 * \frac{sen48}{sen35}$ $b = 7{,}77$ [u]	$\frac{c}{sen\theta} \quad \frac{a}{sen\alpha}$ $c = a * \frac{sen\theta}{sen\alpha}$ $c = 6 * \frac{sen97°}{sen48°}$ $c = 8{,}01$[u]

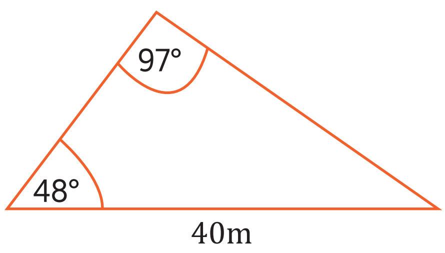
Caso 1

Dados 2 lados y un ángulo.

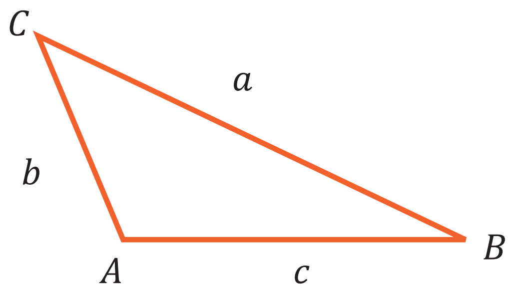


Caso 2

Dados 2 lados y un ángulo.



Teorema de cosenos

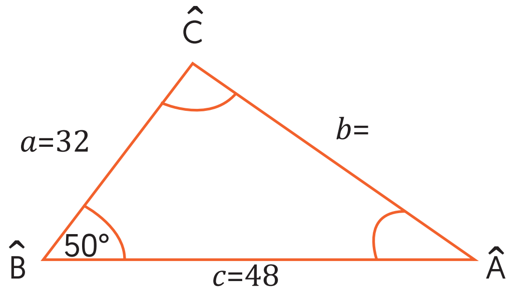


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc * cosA$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac * cosB$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab * cosC$$

DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN ALTERNATIVA

Resolvemos los siguientes triángulos oblicuángulos, utilizando el teorema de seno y coseno. Dependiendo de los elementos que conozcamos.

Ejemplo 1

	Como vemos aquí, no se puede utilizar el teorema del seno ya que siempre nos faltará un dato. Tendremos una ecuación con dos incógnitas y eso no lo podremos resolver. Por ejemplo, tenemos el lado c pero no su ángulo opuesto, o tenemos el ángulo B pero no su lado b. Lo mismo pasa con la relación A y a, falta el ángulo. Entonces en este caso, el teorema del coseno es el indicado ya que lo puede resolver.
Para hallar el lado “b” procedemos así:	$b^2 = a^2 + c^2 - 2 * a * c * cosB$
Remplazamos los datos.	$b^2 = 32^2 + 48^2 - 2 * 32 * 48 * cos50°$
Realizamos las potencias y el coseno con ayuda de la calculadora.	$b^2 = 1024 + 2304 - 3072 * 0.64279$
Realizamos las operaciones indicadas.	$b^2 = 3328 - 1974{,}644$
Restando las cantidades.	$b^2 = 1353{,}36$
Despejar “b”, pasando la potencia como raíz cuadrada.	$b = \sqrt{1353{,}36}$
Sacar la raíz cuadrada.	$b = 36{,}79$
Ahora podemos sacar el ángulo α o el θ para el ángulo α utilizamos la siguiente formula.	$a^2 = b^2 + c^2 - 2 * b * c * cos\hat{A}$
Reemplazamos datos.	$32^2 = 36{,}79^2 + 48^2 - 2 * 36{,}79 * 48 * cos\hat{A}$
Resolvamos las potencias y multiplicación.	$1024 = 1353{,}50 + 2304 - 3531{,}84 * cos\hat{A}$
Realizamos la suma.	$1024 = 3657.5 - 3531{,}84 * cos\hat{A}$
Traspasamos términos.	$1024 - 3657{,}5 = -3531{,}84 * cos\hat{A}$

Realizamos la operación indicada.	$-2633{,}5 = -3531{,}84 * cos\hat{A}$
Despejamos cos Â.	$cos\hat{A} = \frac{-2633{,}5}{-3531{,}84}$
Resolvemos la división.	$cos\hat{A} = 0{,}7456$
Con ayuda de la calculadora calculamos la función inversa para obtener el ángulo deseado, la cual es cos^{-1} o arcos.	$\hat{A} = cos^{-1}0{,}7456$ $\hat{A} = Arcos\ 0{,}7456$
Resolvemos con la calculadora la operación indicada y luego aplicar la función de grados.	$\hat{A} = 41°47'59''$ $\hat{A} = 41°$
Para calcular el ángulo restamos a 180 el valor de los otros ángulos.	$C = 180° - 50° - 41°47'59''$
Resolvemos con ayuda de la calculadora.	$C = 89°$

Problemas de aplicación

Leamos con atención

Calculamos el ancho de un río:
Situamos dos puntos A y B, en las orillas opuestas. Desde el punto A medimos hasta el punto C una distanciva de 200 m y también se miden los ángulos A = 136º y C = 24º antes calculamos el ángulo B= 20º por el teorema de senos.

GRÁFICO	OPERACIÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN ALTERNATIVA

Valoramos nuestros conocimientos adquiridos

El conocimiento de resolución de triángulos es muy relevante y su importancia radica en que es una herramienta imprescindible para áreas como la construcción, arquitectura e ingeniería, por lo que partiendo de tu vivencia y experiencia responde las siguientes preguntas:

1. ¿Por qué son importantes los triángulos y la trigonometría?

R.-..
....
....
....
....
....
....
....

2. Estimado participante ¿Consideras que se aplica los triángulos en la vida real?

R.- ....
....
....
....
....
....
....
....

3. ¿De qué manera incide, lo aprendido en tu vida cotidiana?

R.- ....
....
....
....
....
....
....
....

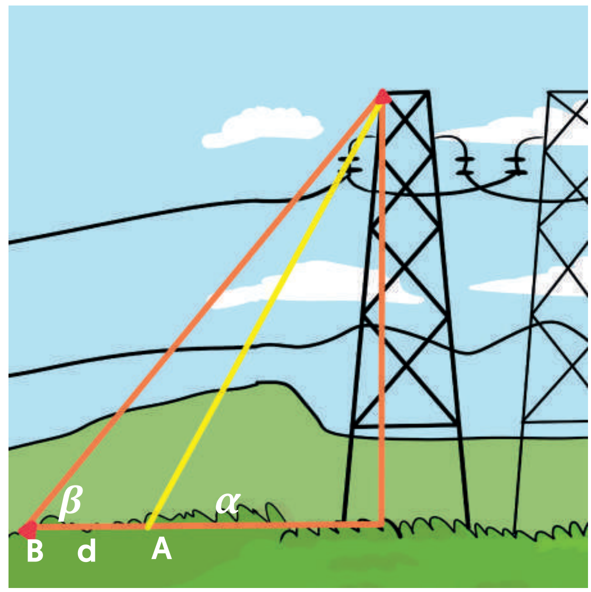
Apliquemos lo aprendido

Para fortalecer lo aprendido realicemos las siguientes actividades:

Medidas de terrenos inclinados, de difícil acceso y otros

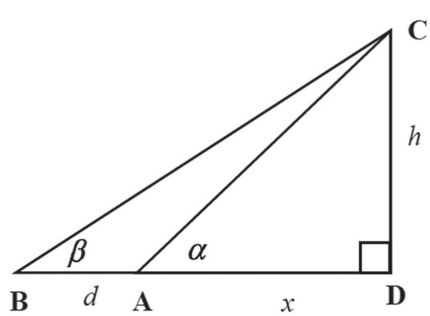
Actividad 1.

Omar y Yeny de un Centro de Educación Alternativa, desean medir la altura de una antena de telecomunicaciones, en Villa Pagador, que se encuentra rodeado por una muralla y para calcularlo se toman las medidas de dos ángulos de elevación separados por una distancia "d" entre el punto A y B



Como se observa se forman triángulos rectángulos que tiene como lados comunes la altura que corresponde con la altura de la antena.

Elaboramos el diagrama que representa el problema de la altura de la antena de telecomunicaciones:



En el $\triangle$ ADC: $\tan\alpha = \dfrac{h}{x} \Rightarrow x = \dfrac{h}{\tan\alpha}$ (1)

En el $\triangle$ BDC:

$$\tan\beta = \frac{h}{d+x} \Rightarrow h = x\tan\beta + d\tan\beta \ (2)$$

emplazando (1) en (2)

$$h = \left(\frac{h}{\tan\alpha}\right)\tan\beta + d\tan\beta$$

$$h\tan\alpha = h\tan\beta + d\tan\alpha\tan\beta$$

$$h\tan\alpha - h\tan\beta = d\tan\alpha\tan\beta$$

$$h(\tan\alpha - \tan\beta) = d\tan\alpha\tan\beta$$

$$\boxed{h = \frac{d\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta}}$$

Obtuvimos la fórmula de la altura de objetos inaccesibles, ya sea porque no existen datos de su dimensión, que no podamos medirlo directamente, etc. Esta fórmula nos permitirá calcular la altura o distancia de objetos inaccesibles.

Actividad 2.

De la figura anterior, Omar y Yeni tomaron las medidas que corresponden del punto A y B: d =10m , los ángulos de elevación son: $a= 45° \, y \, B=35°$. Calcular la altura de la torre de telecomunicaciones.

Con la ayuda de la fórmula deducida y tu facilitador halla las alturas de 3 infraestructuras civiles (edificios, estadium, antenas de alta tensión, antenas de telecomunicaciones, estatuas, etc.) u objetos naturales [árboles, montañas, etc.].

Para lo cual el proyecto debe considerar las siguientes actividades:

- Construcción de clinómetro.
- Práctica de campo.
- Elaboración de proyecto-Informe.
- Entrega de informe de resultados.

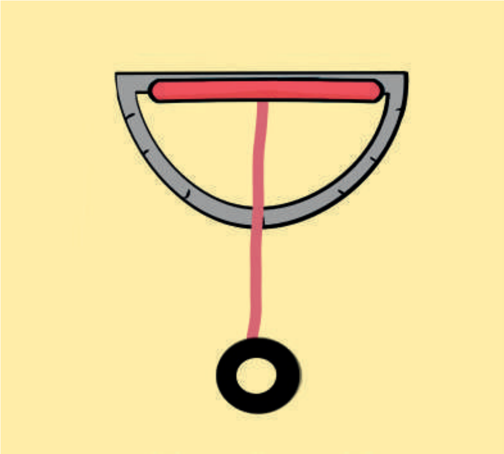
Las mismas deben ser plasmadas en un documento que sistematice la experiencia que desarrollaron, para lo cual deben ponerse de acuerdo con su facilitador para organizar la estructura del documento, tiempos de entrega y otros detalles.

Una vez concluido con la entrega del informe se debe preparar una exposición del Proyecto de cada grupo, su experiencia y los resultados obtenidos.

Construcción de un clinómetro

Para el desarrollo del producto final te proponemos construir un Inclinómetro, utilizando los siguientes materiales

Materiales	**Pasos de construcción**
• Transportador de 180° • Bombilla o tubo de lapicero • Hilo • Objeto que simule una plomada • Pegamento o cinta adhesiva • Clavo o aguja	1ro. Realizar un agujero con el clavo o aguja caliente en el transportador 2do. Introducir el hilo de la plomada por el agujero realizado y realizar un nudo para amarrarlo al transportador. 3ro. Sobre la línea imaginaria entre 0° y 180° pegar la bombilla o tubo de lapicero con el pegamento o cinta adhesiva.



Organización de grupos

Nos organizamos en grupos de 3 personas y nos distribuimos las responsabilidades:

- El observador, quien con la ayuda del clinómetro y un flexómetro realizara la toma de medidas de ángulos de elevación y la distancia entre el primer y segundo punto de medición.
- El asistente, que apuntará y confirmará en un cuaderno los datos de medición que realice el observador.
- El fotógrafo, quien tomará las pruebas fotográficas del trabajo de campo, de las mediciones, de la infraestructura u objeto natural del cual se está calculando su altura.

Una vez tomado los datos, el grupo debe plantear el diagrama aplicando triángulos rectángulos, la fórmula de la altura desarrollada en la sección de la Valoración y hallar la altura que se desea averiguar. Considerar que la altura hallada es una aproximación a la altura real.

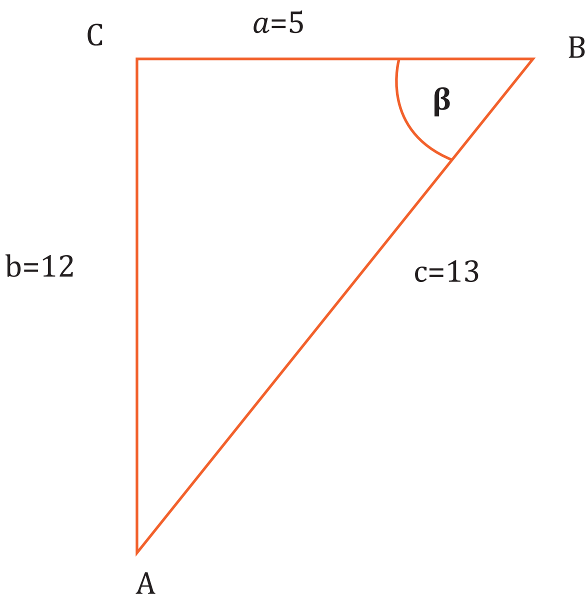
Informe de sistematización

Una vez concluido la experiencia presentar un informe que contendrá una estructura acordada previamente con el facilitador.

Sigamos practicando

Actividad 3.

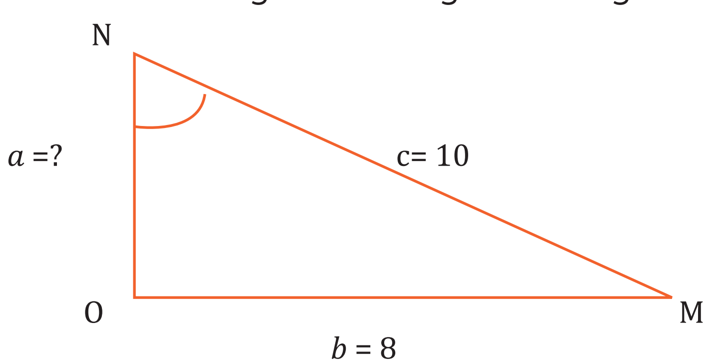
Anotamos de acuerdo al ejemplo los resultados que faltan en el siguiente cuadro, acerca de las funciones trigonométricas de la imagen que se observa al lado.



***sen* β**	$\frac{b}{c} = \frac{12}{13}$
***cotg* β**	
***cos* β**	
***sec* β**	
***tag* β**	
***cosec* β**	

Actividad 4.

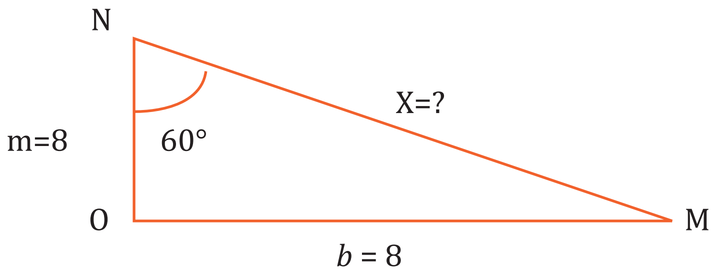
Resolvamos el siguiente triángulo rectángulo completando los resultados que faltan.



Evaluando las funciones trigonométricas del ángulo N	Hallamos el ángulo de referencia (N)

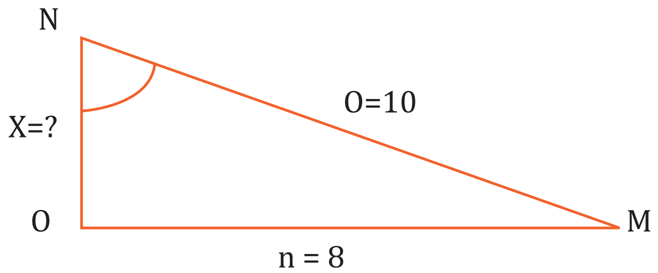
Actividad 5.

Hallamos el valor de x con la función trigonométrica coseno



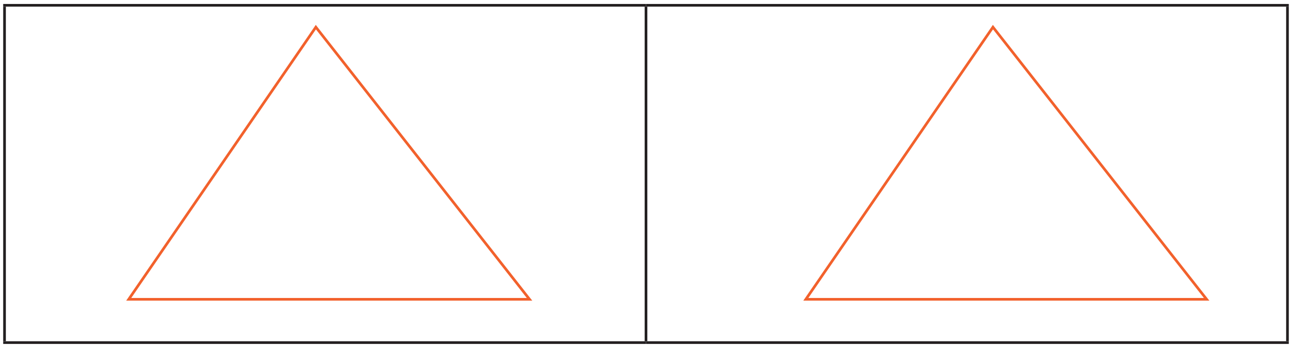
Actividad 6.

Hallar el valor de x del siguiente triángulo



Actividad 7.

Continuamos resolviendo estos triángulos oblicuángulos



Actividad 8.

Realizamos dos problemas contextualizados de la población o comunidad sobre funciones trigonométricas como las que ya se trabajaron. Para calcular o determinar las alturas que se desea averiguar.

Actividad 9.

Ahora practiquemos en nuestros cuadernos.

a) En un huerto del CEA, se desea construir un pequeño Invernadero, cuyo perímetro será un cuadrado de 3x3m, la altura de la pared más alta será de 2,25m y la altura de la pared más baja será de 1,75m. ¿Cuál será la longitud de la caída del techo del invernadero?

b) En un terreno del CEA, se desea construir un corral de gallinas ponedoras, cuya base será un rectángulo de 6,5m de largo y 4m de ancho. Se traza una diagonal de una esquina a otra opuesta ¿Cuál será la medida de la diagonal trazada?

c) En un espacio reforestado del CEA, un árbol de pino se quebró con el viento, formando un triángulo con el suelo. ¿Cuál era la altura del árbol, si la parte del tronco que ha quedado en pie tiene una altura de 9,5m y la parte del tronco que ha caído hacia el suelo, forma un ángulo de 40° con la línea horizontal del suelo?

d) En un terreno del CEA hay un corral de cerdos, que tiene la forma de un triángulo obtusángulo, que deseamos precintar con alambre de púas todo el perímetro del corral. El ángulo mayor del triángulo mide 104º; su lado opuesto mide 12m y su lado adyacente mide 6m. ¿Cuánto medirá el tercer lado del triángulo para poder calcular el perímetro?

e) Un jardín del CEA tiene la forma de un triángulo escaleno, cuyos lados miden 6m, 9m y 12m . ¿Cuánto será la medida de los tres ángulos interiores del triángulo que forma el jardín?

Unidad temática N.º 3:

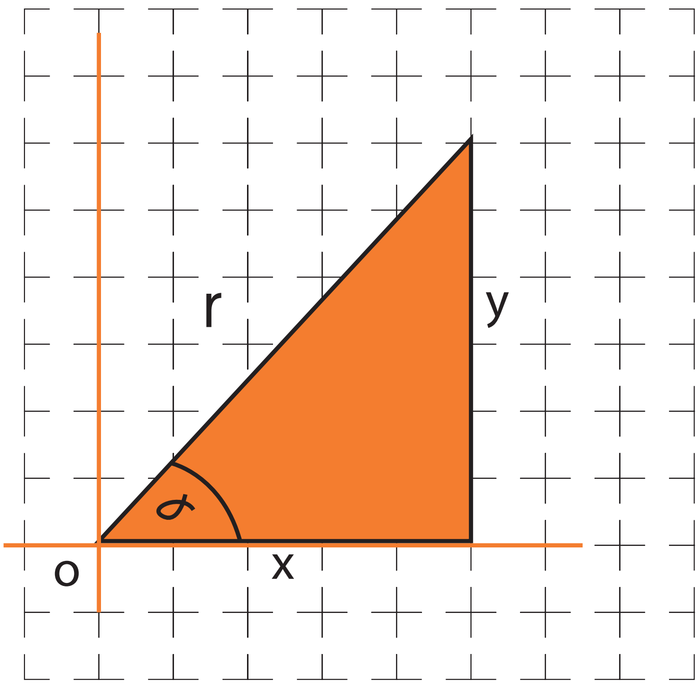
Identidades y ecuaciones

Partamos de nuestra experiencia

Relaciones fundamentales

La matemática tiene una infinidad de aplicaciones, por ejemplo: medicina, ingeniería, etc., muchas veces es necesario simplificar expresiones trigonométricas complicadas y expresarlas con otras equivalentes más sencillas. Así en medicina un osciloscopio exhibe expresiones trigonométricas.

RELACIONES FUNDAMENTALES		
RELACIONES RECÍPROCAS		SUS DERIVADOS
$sen \propto * csc \propto = 1 \dots\dots (1)$		$sen \propto = \frac{1}{csc \propto}$
		$csc \propto = \frac{1}{sen \propto}$
$cos \propto * sec \propto = 1 \dots\dots (2)$		$cos \propto = \frac{1}{sec \propto}$
		$sec \propto = \frac{1}{cos \propto}$
$tg \propto * ctg \propto = 1 \dots\dots (3)$		$tg \propto = \frac{1}{ctg \propto}$
		$ctg \propto = \frac{1}{tg \propto}$
RELACIONES POR COCIENTE		
$tg \propto = \frac{sen \propto}{cos \propto} \dots\dots (4)$		$ctg \propto = \frac{cos \propto}{sen \propto} \dots\dots (5)$
RELACIONES PITAGÓRICAS		SUS DERIVADOS
$sen^2 \propto + cos^2 \propto = 1 \dots\dots (6)$		$sen^2 \propto = 1 - cos^2 \propto$
		$cos^2 \propto = 1 - sen^2 \propto$
$tg^2 \propto + 1 = sec^2 \propto \dots\dots (7)$		$tg^2 \propto = sec^2 \propto - 1$
$ctg^2 \propto + 1 = csc^2 \propto \dots\dots (8)$		$ctg^2 \propto = csc^2 \propto - 1$



Demostremos las relaciones trigonométricas fundamentales:

$$sen\ \alpha = \frac{y}{r} \qquad csc\ \alpha = \frac{r}{y}$$

$$\cos\ \alpha = \frac{x}{r} \qquad sec\ \alpha = \frac{r}{x}$$

$$tg\ \alpha = \frac{y}{r} \qquad tg\ \alpha = \frac{x}{y}$$

Reemplazamos en las relaciones anteriores:

$$(1)\ sen \propto * csc \propto = \frac{y}{r} * \frac{r}{y} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad sen \propto * csc \propto = 1$$

$$(2)\ cos \propto * sec \propto = \frac{x}{r} * \frac{r}{x} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad cos \propto * sec \propto = 1$$

$$(3)\ tg \propto * ctg \propto = \frac{y}{x} * \frac{x}{y} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad tg \propto * ctg \propto = 1$$

$$(4)\ tg \propto = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{sen\propto}{cos\propto} \qquad \Longrightarrow \qquad tg \propto = \frac{sen \propto}{cos \propto}$$

$$(5)\ ctg \propto = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{cos\propto}{sen\propto} \qquad \Longrightarrow \qquad ctg \propto = \frac{cos \propto}{sen \propto}$$

$$(6)\ y^2 + x^2 = r^2 \Longrightarrow \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad sen^2 \propto + cos^2 \propto = 1$$

$$(7)\ sen^2 \propto + cos^2 \propto = 1 \quad // \div cos^2 \propto$$

$$\frac{sen^2 \propto}{cos^2 \propto} + \frac{cos^2 \propto}{cos^2 \propto} = \frac{1}{cos^2 \propto} \qquad \Longrightarrow \qquad tg^2 \propto + 1 = sec^2 \propto$$

$$(8)\ sen^2 \propto + cos^2 \propto = 1 \quad // \div sen^2 \propto$$

$$\frac{sen^2 \propto}{sen^2 \propto} + \frac{cos^2 \propto}{sen^2 \propto} = \frac{1}{sen^2 \propto} \qquad \Longrightarrow \qquad 1 + ctg^2 \propto = csc^2 \propto$$

Simplificación de expresiones trigonométricas

Simplificar significa, convertir una expresión amplia en algo más reducida, no existe una regla general para realizar las simplificaciones de expresiones trigonométricas, pero, ponemos la sugerencia de transformarlos en funciones de seno y coseno, así mismo tener en mente las ocho relaciones fundamentales.

Ejemplo 1. Simplificamos las siguientes expresiones trigonométricas:

a) $csc^2 \propto - csc^2 \propto * \, csc^2 \propto \quad \Leftarrow factorizamos \; csc^2 \propto$

$= csc^2 \propto (1 - csc^2) \quad \Leftarrow 1 - csc^2 \propto = sen^2 \propto$

$= csc^2 \propto * \, sen^2 \propto \quad \Leftarrow relación \; recíproca$

$= 1 \quad \therefore csc^2 \propto - csc^2 \propto * \, csc^2 \propto = 1$

Cuadrado de la suma

b) $(sen \propto + \cos \propto)^2 \quad \Leftarrow (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$= sen^2 \propto + 2 * sen \propto * \cos \propto + \cos^2 \propto \quad \Leftarrow ordenando$

$= sen^2 \propto + \cos^2 \propto + 2 * sen \propto * \cos \quad \Leftarrow sen^2 \propto + \cos^2 \propto = 1$

$= 1 + 2 * sen \propto * \cos \propto \quad \therefore (sen \propto + \cos \propto)^2 = 1 + 2 * sen \propto * \cos \propto$

c) $\frac{sen\propto}{csc\propto} + \frac{cos\propto}{sec\propto} \quad \Leftarrow csc \propto = \frac{1}{sen\propto} \; ; sec \propto = \frac{1}{cos\propto}$

$= \frac{sen\propto}{\frac{1}{sen\propto}} + \frac{cos\propto}{\frac{1}{cos\propto}} \quad \Leftarrow Multiplicar \; extremos \; y \; medios$

$= sen^2 \propto + \cos^2 \propto \quad \Leftarrow relación \; recíproca$

$= 1 \quad \therefore \frac{sen\propto}{csc\propto} + \frac{cos\propto}{sec\propto} = 1$

d) $\frac{1}{1+cos\propto} + \frac{1}{1-cos\propto} \quad \Leftarrow suma \; de \; fracciones \; heterogéneas$

$= \frac{1-cos\propto+1+cos\propto}{(1+cos\propto)(1-cos\propto)} \quad \Leftarrow (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$= \frac{2}{1-cos^2\propto} \quad \Leftarrow sen^2 \propto = 1 - \cos^2 \propto$

$= \frac{2}{sen^2\propto} \quad \Leftarrow sen^2 \propto = \frac{1}{csc^2\propto}$

$= 2csc^2 \propto \quad \therefore \frac{1}{1+cos\propto} + \frac{1}{1-cos\propto} = 2csc^2 \propto$

Diferencia de cuadrados

Ejemplo 2. Simplificamos usando las relaciones fundamentales:

a) $sen \propto * \frac{1}{tg\propto}$ $\Leftarrow tg \propto = \frac{sen\propto}{cos\propto}$

$= sen \propto * \frac{1}{\frac{sen\propto}{cos\propto}}$

$= sen \propto * \frac{cos\propto}{sen\propto}$

$\therefore sen \propto * \frac{1}{tg\propto} = \boxed{cos \propto}$

Diferencia de cuadrados

b) $\frac{cos^2x - sen^2x}{cos^4x - sen^4x}$ $\Leftarrow a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$= \frac{\cancel{cos^2x - sen^2x}}{(cos^2x + sen^2x)\cancel{(cos^2x - sen^2x)}}$ $\Leftarrow simplificando$

$= \frac{1}{(cos^2x + sen^2x)}$ $\Leftarrow sen^2 \propto + cos^2 \propto = 1$

$= \frac{1}{1} = 1$ $\therefore \frac{cos^2x - sen^2x}{cos^4x - sen^4x} = 1$

c) $\frac{csc\, x}{1 + ctg^2\, x}$ $\Leftarrow csc\, x = \frac{1}{sen\, x}$ $\quad ctg^2 x = \frac{cos^2\, x}{sen^2\, x}$

$= \frac{\frac{1}{sen\, x}}{1 + \frac{cos^2\, x}{sen^2\, x}}$ $\Leftarrow a + \frac{b}{c} = \frac{a*c+b}{c}$

$= \frac{\frac{1}{sen\, x}}{\frac{sen^2\, x + cos^2\, x}{sen^2\, x}}$ $\Leftarrow sen^2\, x + cos^2\, x = 1$

$= \frac{\frac{1}{sen\, x}}{\frac{1}{sen^2\, x}}$ $\Leftarrow Multiplicacion\ de\ extremos\ y\ medios$

$= \frac{sen^2\, x}{sen\, x}$ $\Leftarrow sen^2 x = sen\, x * sen\, x \quad Simplificación$

$= \frac{senx * \cancel{senx}}{\cancel{senx}}$

$= sen\, x$ $\quad \therefore \frac{csc\, x}{1 + ctg^2 x} = sen\, x$

DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN ALTERNATIVA

Ejercicios.

Aplicando los conocimientos adquiridos, procedemos a simplificar las siguientes expresiones trigonométricas:

1. $ctg^2\, x * sec^2\, x - ctg^2 x$
2. $\frac{1}{sen^2 x} + \frac{1}{cos^2 x}$
3. $(\sec x - tg\ x)(\sec x + tg\ x)$
4. $\frac{sen\ x * tg\ x + \cos x}{sen\ x * \sec x}$
5. $tg^2 x + \frac{1}{sen\ x * \csc x}$

Profundicemos nuestros saberes y conocimientos

Identidades trigonométricas

IDENTIDAD	IGUALDAD

Dentro de nuestra sociedad boliviana, tanto mujeres como hombres, vivimos en igualdad de derechos y oportunidades.

Lo mismo sucede con la matemática, suceden igualdades trigonométricas que se verifican con diferentes ángulos.

Para verificar estas identidades trigonométricas, se sugiere tomar en cuenta estas tres opciones para una mejor resolución.

a) Partiendo del primer miembro.

Utilizando las relaciones fundamentales y operaciones algebraicas llegamos a igualar al segundo miembro.

b) Partiendo del segundo miembro.

Utilizando las relaciones fundamentales y operaciones algebraicas llegamos a igualar al primer miembro.

c) Iniciando en los dos miembros a la vez.

Trabajando en ambos miembros hasta llegar a una igualdad evidente.

Recordemos los valores de las funciones trigonométricas de ángulos especiales.

Grados	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**	**120°**	**135°**	**150°**	**180°**
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$sen\ \beta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$cos\ \beta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$tg\ \beta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$ctg\ \beta$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$-\infty$
$sec\ \beta$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{2}$	-1
$csc\ \beta$	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	∞

Repasemos las siguientes relaciones fundamentales:

$csc \propto = \frac{1}{sen \propto}$	$tg \propto = \frac{sen \propto}{cos \propto}$	$sen^2 \propto + cos^2 \propto = 1$ $sen^2 \propto = 1 - cos^2 \propto$	$tg^2 \propto + 1 = sec2 \propto$
$sec \propto = \frac{1}{cos \propto}$	$ctg \propto = \frac{cos \propto}{sen \propto}$	$cos^2 \propto = 1 - sen^2 \propto$	$ctg^2 \propto + 1 = csc^2 \propto$

Ejercicios.
Aplicando los conocimientos adquiridos, procedemos a simplificar las siguientes expresiones trigonométricas:

a) $1 + tg^2 \propto = sec^2 \propto \qquad \Leftarrow tg^2 \propto = \frac{sen^2\propto}{cos^2\propto}$

$1 + \frac{sen^2\propto}{cos^2\propto} = sec^2 \propto \qquad \Leftarrow a + \frac{b}{c} = \frac{a*c+b}{c}$

$\frac{cos^2\propto + sen^2\propto}{cos^2\propto} = sec^2 \propto \qquad \Leftarrow sen^2 \propto + cos^2 \propto = 1$

$\frac{1}{cos^2\propto} = sec^2 \propto \qquad \Leftarrow \frac{1}{cos^2\propto} = sec^2 \propto$

$sec^2 \propto = sec^2 \propto$

b) $\frac{1+sec\propto}{1-sec\propto} = \frac{cos\propto+1}{cos\propto-1} \qquad \Leftarrow sec \propto = \frac{1}{cos\propto}$

$\frac{1+\frac{1}{cos\propto}}{1-\frac{1}{cos\propto}} = \frac{cos\propto+1}{cos\propto-1} \qquad \Leftarrow a + \frac{b}{c} = \frac{a*c+b}{c}$

$\frac{\frac{cos\propto+1}{\cancel{cos\propto}}}{\frac{cos\propto-1}{\cancel{cos\propto}}} = \frac{cos\propto+1}{cos\propto-1} \qquad \Leftarrow Simplificamos$

$\frac{cos\propto+1}{cos\propto-1} = \frac{cos\propto+1}{cos\propto-1}$

Ejemplo 2.
Verificamos las identidades trigonométricas partiendo del segundo miembro.

a) $2\,sen^2x - 1 = sen^4x - cos^4x \qquad \Leftarrow a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$2sen^2x - 1 = (sen^2x + cos^2x)(sen^2x - cos^2x) \qquad \Leftarrow sen^2x + cos^2x = 1$

$2sen^2x - 1 = 1 * (sen^2x - cos^2x)$

$2sen^2x - 1 = sen^2x - cos^2x \qquad \Leftarrow cos^2x = 1 - sen^2x$

$2sen^2x - 1 = sen^2x - (1 - sen^2x)$

$2sen^2x - 1 = \underline{sen^2x} - 1 + \underline{sen^2x}$

$2sen^2x - 1 = 2sen^2x - 1$

b) $2csc^2x = \frac{1}{1-cosx} + \frac{1}{1+cosx}$

$2csc^2x = \frac{1+\cos x+1-\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} \qquad \Leftarrow 1 - cos^2x = (1-cosx)(1+\cos x)$

$2csc^2x = \frac{2}{1-cos^2 x} \qquad \Leftarrow sen^{2x} = 1 - cos^2x$

$2csc^2x = \frac{2}{sen^2 x}$

$2csc^2 x = 2csc^2 x$

Ejercicios:

1. $\cos x * tg\ x = sen\ x$
2. $sen\ x * ctg\ x = \cos x$
3. $(sen\ x + \cos x)^2 + (sen\ x - \cos x)^2 = 2$
4. $(\sec x + \cos x)(\sec x - \cos x) = tg^2\ x + sen^2\ x$

Funciones trigonométrica de la suma y diferencia de ángulos:

En trigonometría se van a observar suma y diferencia de ángulos, para eso necesitamos determinar el valor preciso de una función trigonométrica que afecta esta suma y diferencia, son los siguientes:

$$sen(a+b) = sen\ a * \cos b + \cos a * sen\ b$$

$$\cos(a+b) = \cos a * \cos b - sen\ a * sen\ b$$

$$tg\ (a+b) = \frac{tga + tg\ b}{1 - tg\ a * tg\ b}$$

$$sen(a-b) = sen\ a * \cos b - \cos a * sen\ b$$

$$\cos(a-b) = \cos a * \cos b + sen\ a * sen\ b$$

$$tg\ (a-b) = \frac{tga - tg\ b}{1 + tg\ a * tg\ b}$$

Ejemplo:

Hallamos el valor de seno, coseno y tangente de 75°.

Resolviendo... 75° los expresamos como suma de 45° + 30°

a) $sen\ 75° = sen\ (45° + 30°)$

$$sen\ 75° = sen\ 45° * \cos 30° + \cos 45° * sen\ 30°$$

$$sen\ 75° = \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{1}{2}$$

$$sen\ 75° = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$sen\ 75° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

b) $\cos 75° = \cos\ (45° + 30°)$

$$\cos 75° = \cos 45° * \cos 30° - sen\ 45° * sen\ 30°$$

$$\cos 75° = \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{1}{2}$$

$$\cos 75° = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 75° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

c) $tg\ 75° = tg\ (45° + 30°)$

$$tg\ 75° = \frac{tg\ 45° + tg\ 30°}{1 - tg\ 45° * tg\ 30°}$$

$$tg\ 75° = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 * \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$tg\ 75° = \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}$$

$$tg\ 75° = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

Ejemplo:

Hallar el valor de seno, coseno y tangente de 105º.

Resolviendo… 105º los expresamos como suma de 60º + 45º

a) $sen\ 105° = sen\ (60° + 45°)$

$$sen\ 105° = sen\ 60° * cos\ 45° + \cos 60° * sen\ 45°$$

$$sen\ 105° = \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sen\ 105° = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$sen\ 105° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

b) $\cos 105° = \cos\ (60° + 45°)$

$$\cos 105° = \cos 60° * \cos 45° - sen\ 60° * sen\ 45°$$

$$\cos 105° = \frac{1}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 105° = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\cos 105° = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

c) $tg\ 105° = tg\ (60° + 45°)$

$$tg\ 105° = \frac{tg\ 60° + tg\ 45°}{1 - tg\ 60° * tg\ 45°}$$

$$tg\ 105° = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}*1}$$

$$tg\ 105° = \frac{(\sqrt{3}+1)}{(1-\sqrt{3})} * \frac{(1+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})}$$

$$tg\ 105° = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

tg 105°=-(2+$\sqrt{3}$)-2-$\sqrt{3}$

APRENDIZAJES ESPECIALIZADOS - MATEMÁTICA

Ecuaciones trigonométricas

En ocasiones se presentan ecuaciones que involucran funciones trigonométricas. Por ejemplo, $2sex - 1 = 0$, es una ecuación trigonométrica.

En general, las ecuaciones que involucran funciones trigonométricas se resuelven mediante los métodos utilizados para resolver ecuaciones algebraicas.

Como se ha estudiado, una identidad es una igualdad que incluye variables y se cumple para cualquier valor de dichas variables, en tanto que, una ecuación es una igualdad que incluye variables y sólo es cierta para algunos valores de las variables. Las soluciones de una ecuación son los valores de la incógnita para los cuales se cumple la igualdad. Así, resolver una ecuación es encontrar sus soluciones.

Para resolver ecuaciones se utilizan las siguientes reglas:

a) Si a dos miembros de una ecuación se le suma o resta una expresión (algebraica o numérica), se obtiene una ecuación equivalente.
b) Si se multiplican o dividen los dos miembros de una ecuación por el mismo número, diferente de cero, se obtiene una ecuación equivalente.

Para comprobar si un número es solución de una ecuación basta sustituir la variable por dicho número en ambos miembros y resolver las operaciones.
Si en cada miembro se obtiene el mismo valor, el número reemplazado es solución de la ecuación.

- Soluciones de ecuaciones lineales.

Una ecuación lineal es de la forma $ax + b = c; a \neq 0$

- Soluciones de ecuaciones cuadráticas.

Una ecuación cuadrática es de la forma $ax^2 + bx + c = 0; a \neq 0$. Las ecuaciones cuadráticas se pueden resolver mediante factorización, completando cuadrados o por medio de la fórmula cuadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- **Ecuaciones trigonométricas – definición**

Una ecuación trigonométrica es una ecuación en la cual intervienen funciones trigonométricas de un ángulo x y se satisface sólo para algunos valores de x.
Las soluciones de una ecuación trigonométrica son los valores del ángulo p ara los cuales se cumple la igualdad. Por ejemplo, una solución de la ecuación $senx - 1 = 0$ es $x = \frac{\pi}{2}$, porque el $sen\frac{\pi}{2} - 1 = 0$ puesto que $sen\frac{\pi}{2} = 1$

DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN ALTERNATIVA

- **Solución de ecuaciones de la forma $f_{(x)} = k$**

Algunas ecuaciones trigonométricas son de la forma $f_{(x)} = k$, donde $f_{(x)}$ es una función trigonométrica y k es una constante. Por ejemplo, $tanx$ = 1 es de la forma k, donde $f_{(x)}$ = tan$x$ k = 1. Este tipo de ecuaciones pueden tener infinito número de soluciones.

- **Ecuaciones trigonométricas de la forma cuadrática**

Algunas ecuaciones trigonométricas tienen forma cuadrática, por tal razón para su solución se utilizan los métodos descritos para la solución de la ecuación cuadrática.

- **Ecuaciones trigonométricas con identidades**

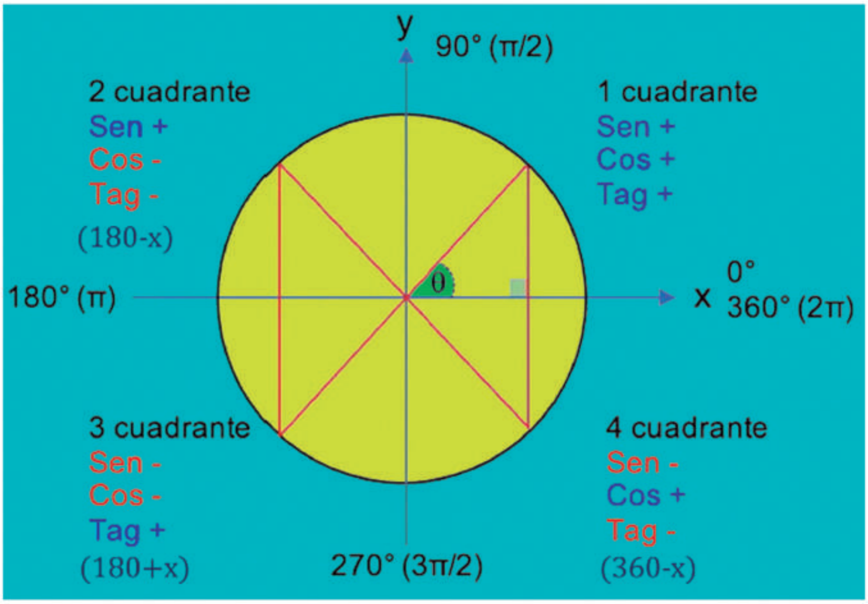
Algunas ecuaciones trigonométricas requieren la aplicación de las identidades fundamentales para su solución.

- **Ecuaciones trigonométricas con identidades para ángulos dobles y ángulos medios**

Es posible plantear y resolver ecuaciones que involucran identidades para ángulos dobles y ángulos medios.

- **Ecuaciones trigonométricas con funciones inversas**

Es posible plantear ecuaciones trigonométricas con funciones inversas. Para la solución de dichas ecuaciones se utilizan las definiciones y laspropiedades de las funciones inversas.



APRENDIZAJES ESPECIALIZADOS - MATEMÁTICA

• Funciones trigonométricas

<u>Ángulo suma</u>

sen (α ± β) = senα·cosβ ± cosα·senβ
cos (α ± β) = cosα·cosβ ± senα·senβ
tg (α + β) = (tgα + tgβ) / (1 – tgα·tgβ)
tg (α – β) = (tgα – tgβ) / (1 + tgα·tgβ)

<u>Ángulo doble</u>

sen2α = 2senα·cosα
cos2α = cos2α – sen2α
tg2α = (2tgα) / (1 – tg2α)

<u>Ángulo mitad</u>

senα/2 = ± √((1 – cosα)/2)
cosα/2 = ± √((1 + cosα)/2)
tgα/2 = ± √((1-cosα)/(1+cosα))

<u>Transformar sumas en productos</u>

senα + senβ = 2sen((α+β)/2)·cos((α-β)/2)
senα – senβ = 2cos((α+β)/2)·sen((α-β)/2)
cosα + cosβ = 2cos((α+β)/2)·cos((α-β)/2)
cosα - cosβ = -2sen((α+β)/2)·sen((α-β)/2)

Resolvamos los siguientes ejercicios:

1. $3cos^2x + sen^2x = 2$

EJERCICIO	CONSIDERACIONES
$3cos^2x + sen^2x = 2$	Convertir en función sen; $cos^2 = 1 - sen^2$
$3(1 - sen^2x) + sen^2 = 2$ $3 - 3sen^2x + sen^2 = 2$ $-2sen^2x = -1 \quad *(-1)$	Reducimos términos semejantes Multiplicamos por (-1)
$2sen^2x = 1$ $sen^2x = \frac{1}{2}$	Extraemos raíces a ambos miembros
$senx = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	Despejamos x
$x = \sin^{-1}\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$	Para el despeje de x aplicamos *arc sen* considerando que se trabajará con dos valores, un negativo y otro positivo.
$x_1 = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \rightarrow 45°; 135°$	Hallamos los valores de x_1 con el uso de la calculadora y apoyo del círculo unitario.
$x_2 = \sin^{-1}\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \rightarrow -45°; 225°; 315°$	Hallamos los valores de x_2 con el uso de la calculadora y apoyo del círculo unitario.

2. $2tgx - 3ctgx - 1 = 0$

EJERCICIO

$$2tgx - 3ctgx - 1 = 0$$

$$2tgx - \frac{3}{tgx} - 1 = 0 \qquad * tgx$$

$$2tgx * tgx - \frac{3}{\cancel{tgx}} * \cancel{tgx} - 1 * tgx = 0$$

$$2tg^2x - 3 - tgx = 0$$

$$2tg^2x - tgx - 3 = 0$$

$$a = 2 \quad b = -1 \quad c = -3$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1^2 - 4 * 2 * (-3)}}{2 * 2} \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} \rightarrow x = \frac{1 \pm 5}{4} \rightarrow x_1 = \frac{3}{2};\ x_2 = -1$$

$$tgx_1 = \frac{3}{2} \rightarrow x_1 = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$x_1 = 56{,}31°; 236{,}31°$$

$$tgx_2 = -1 \rightarrow x_2 = \tan^{-1}(-1)$$

$$x_2 = -45°; 135°; 315°$$

CONSIDERACIONES

Aplicamos relacione trigonométricas $ctg\ a\ tg$

Multiplicamos la ecuación por tgx

Simplificamos términos semejantes

Ordenamos y aplicamos la fórmula de ecuación de 2do grado $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

3. $cos^2x - 3sen^2x = 0$

EJERCICIO

$$cos^2x - 3sen^2x = 0$$

$$1 - sen^2x - 3sen^2x = 0$$

$$1 - 4sen^2x = 0$$

$$-4sen^2x = -1$$

$$sen^2x = \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{sen^2x} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$senx = \pm\frac{1}{2} \rightarrow x = \sin^{-1} \pm \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \sin^{-1}\frac{1}{2};\ x_1 = 30°; 150°$$

$$x_2 = \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right); x_2 = -30°; 210°; 330$$

CONSIDERACIONES

Convertimos en función sen; $cos^2 = 1 - sen^2$

Reducimos términos semejantes

Transponemos términos.

Multiplicamos por -1.

Extraemos raíces a ambos miembros.

Para el despeje de x aplicamos $arc\ sen$ considerando que se trabajará con dos valores, un negativo y otro positivo.

Hallamos los valores de x_1. con el uso de la calculadora y apoyo del círculo unitario.

Hallamos los valores de x_2 con el uso de la calculadora y apoyo del círculo unitario.

4. $sen(2x+60)+sen(x+30)=0$

EJERCICIO

$$sen(2x+60)+sen(x+30)=0$$
$$sen2(x+30)+sen(x+30)=0$$
$$sen2\theta+sen\theta=0$$
$$2sen\theta cos\theta+sen\theta=0$$
$$sen\theta(2cos\theta+1)=0$$
$$sen\theta=0 \;\rightarrow \theta = \sin^{-1}0 \rightarrow \theta = 0°; 180°$$
$$1)\ \theta = x+30=0 \;\rightarrow x=-30°$$
$$2)\ \theta = x+30=180 \;\rightarrow x=150°$$
$$2cos\theta+1=1 \rightarrow cos\theta=-\frac{1}{2}$$
$$\rightarrow \theta=\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \rightarrow \theta = 120°, 240°$$
$$3)\ \theta = x+30=120 \;\rightarrow x=90$$
$$4)\ \theta = x+30=240 \;\rightarrow x=210$$

CONSIDERACIONES

Factor común

Cambio de variable $x + 30 = \theta$

Por identidad $sen2\theta = 2sen\theta cos\theta$

Factor común

Despejamos

Calculamos θ con el apoyo de calculadora y círculo unitario.

Reemplazamos el valor de θ en $x + 30 = \theta$

Calculamos θ con el apoyo de calculadora y círculo unitario.

Reemplazamos el valor de θ en $x + 30 = \theta$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- $2cosx = 3tgx$

2.- $2cosx + 1 = 0$

3.- $senx = cosx$

4.- $sen^2x + tg^2x = 0$

5.- $cos2x - senx - sen2x - cosx = 0$

6.- $\frac{sen(60°-x)}{cosx}$

Valoremos lo aprendido respondiendo a las siguientes preguntas:

¿En qué momento de nuestra vida utilizamos ecuaciones trigonométricas?

R...
....
....
....
....
....
....

¿Cómo coadyuvan las ecuaciones trigonométricas en las otras ramas de la ciencia? Mencionaremos la relación con 5 ejemplos.

R...
....
....
....
....
....
....

¿Qué tan útil te resulta construir y deducir ecuaciones trigonométricas para la aplicación?

R...
....
....
....
....
....

Apliquemos lo aprendido

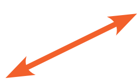
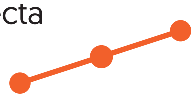
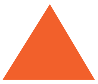
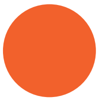
- Realiza un informe sobre tres de las identidades que consideres útiles para demostrar la igualdad trigonométrica.
- Desarrollemos una propuesta de aplicación de las ecuaciones trigonométricas con uno de los ejemplos mencionados.

Unidad temática N.º 4:

Geometría plana y analítica

Partamos de nuestra experiencia

Observamos y recordamos las muchas veces que pudimos ver figuras geométricas en nuestro cotidiano vivir, muchas veces las aplicamos o utilizamos en la casa, en el trabajo, en el transporte, en el estudio o en otras circunstancias, por lo cual te pedimos que puedas completar el siguiente cuadro y expliques cual es la utilidad que observaste:

FIGURA GEOMÉTRICA	EXPLICACIÓN DE USO O APLICACIÓN	DIBUJA EL OBJETO QUE REPRESENTA LA FIGURA GEOMÉTRICA
Punto 		
Línea recta 		
Segmento de recta 		
Triángulo 		
Cuadrado 		
Rombo 		
Círculo 		

Profundicemos nuestros saberes y conocimientos

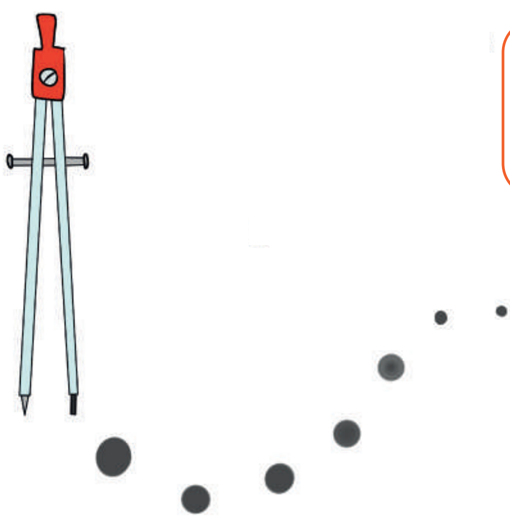
Geometría

La matemática es una ciencia muy amplia, la misma no solo se limita al estudio de números y sus propiedades y relaciones con las diversas operaciones. En este entendido la matemática tiene una rama que estudia las figuras geométricas denominada geometría.

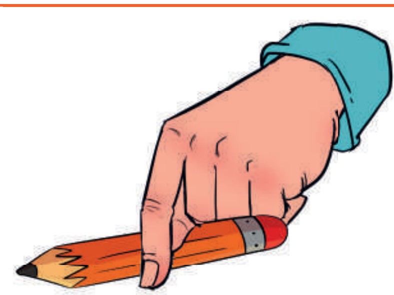
La geometría es considerada como una rama que en su forma más elemental se ocupa de problemas métricos, de la superficie de figuras planas y el volumen de cuerpos sólidos.

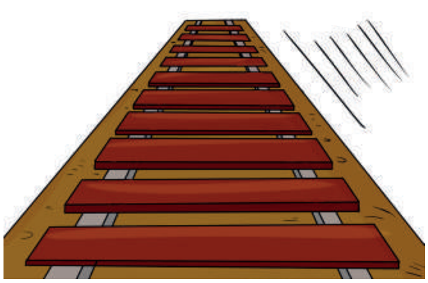
Entre los campos de la geometría tenemos a la geometría plana (la cual estudiaremos), geometría del espacio, geometría analítica, geometría descriptiva, geometría fractal, topología entre otras que sugerimos investigar.

Geometría plana
Punto, recta, plano
Describamos el punto, recta, plano y espacio apartir de un ejemplo que nos permitirán observar y sugerir conceptos que permitan acercarnos a los elementos básicos de la geometría:

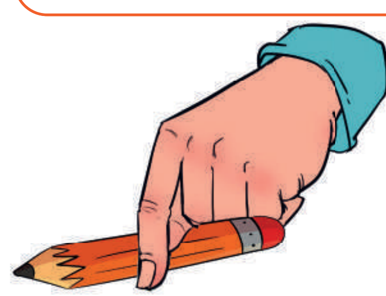


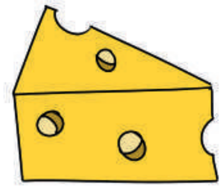
Punto: ubicación sin longitud ni altura y anchura



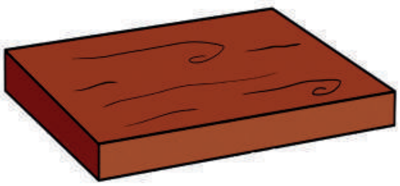


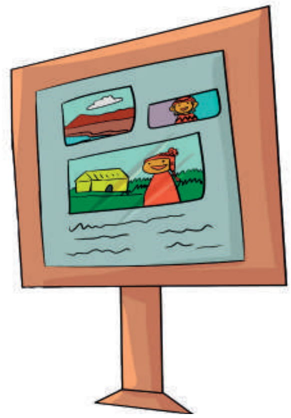
Recta: longitud sin límite y sin espesor



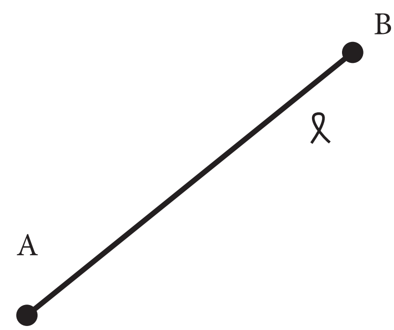


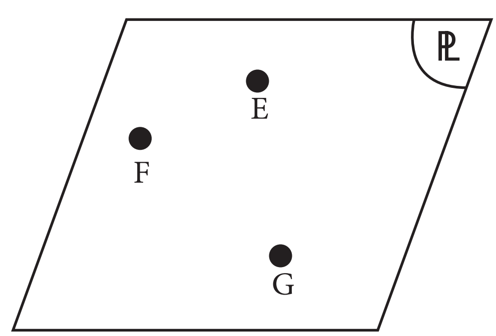
Plano: tiene dimensiones ilimitadas, continúo y sin grosor.





• Relaciones entre puntos, rectas y planos.
En geometría los puntos se representan a través de un punto
y se nombran con letras mayúsculas del alfabeto.
Asimismo, la recta se considera como una sucesión de puntos, se nombran usando dos puntos situados sobre la recta, como en el ejemplo se tiene a la recta “AB”, sin embargo, se puede llamar a una recta con una letra minúscula; “l ”.
Un plano [ℙ] contiene un conjunto de puntos,(E, F y G)
se nombra con una letra mayúscula el cual contiene por lo menos tres puntos, así como en el ejemplo:





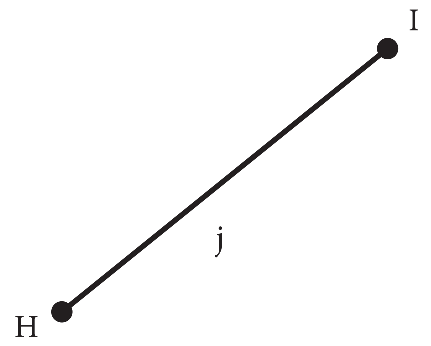
Actividad 1

1. Grafiquemos los siguientes puntos: A, F, G,T, M, P

2. Grafiquemos las siguientes rectas:
a. $\overline{AB}$
b. $\overline{GH}$
c. $\overline{MP}$

• Segmento de recta.
El segmento de recta es una parte o porción de una recta, limita por 2 puntos, el cual se puede denominar a partir de los extremos del segmento o por una letra minúscula. En el caso de la figura podemos llamar al segmento de dos formas:

Segmento HI : *HI*
Segmento *j*



Actividad 2

Tracemos 4 segmentos de recta e indica los 2 nombres que le asignaremos a dichos segmentos.

Actividad 4

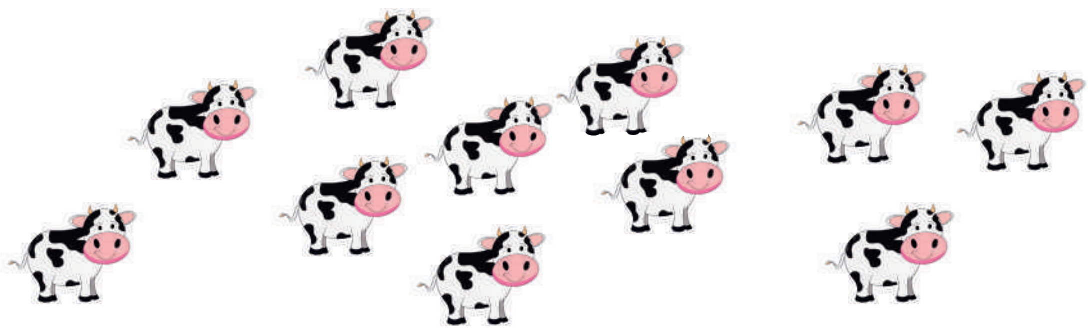
En nuestro cuaderno de actividades, realicemos lo siguiente:

1. Grafica cinco puntos no colineales y 3 puntos colineales.
2. Grafica seis rectas y asígnales nombres.
3. Grafica cinco segmentos de rectas y nómbralas de las 2 formas posibles.

Polígonos o figuras geométricas planas.

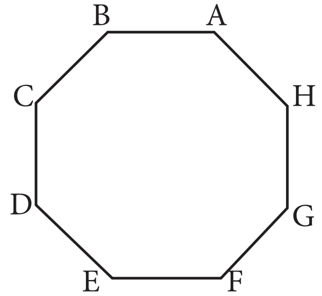
¿Qué es un polígono?

Un participante tiene 11 vacas que pastan en sus terrenos, sin embargo, para esta acción debe formar un corral con 4 vallas rectas de madera como límite (se pueden cruzar las vallas), ¿Cómo quedaría el corral para las vacas? (graficar el corral)

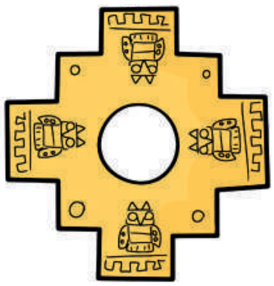


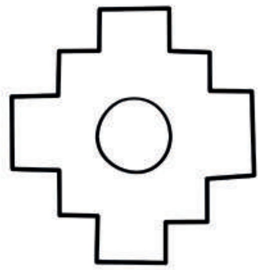
- **Polígono**

Las figuras geométricas formadas por segmentos de recta son muy comunes en nuestro diario vivir, estas figuras geométricas se llamas polígonos, así como en la señalización del Tren Metropolitano de Cochabamba.
De la figura de la fotografía analizamos los segmentos de recta que contienen:



A cada segmento del polígono se le llama lado.
El polígono de la izquierda tiene 8 lados
Este polígono se llama: ABCDEFGH.

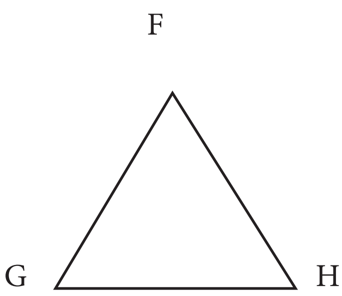
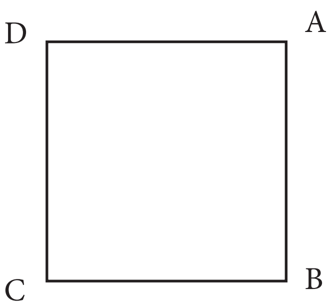
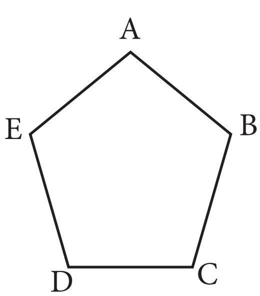


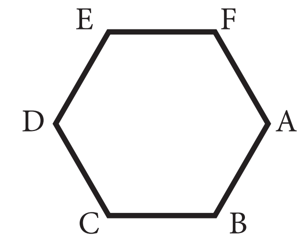
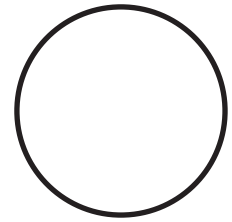


A cada segmento de la chakana se le llama __________.
El polígono de la izquierda tiene ________ lados
Este polígono se llama:
____

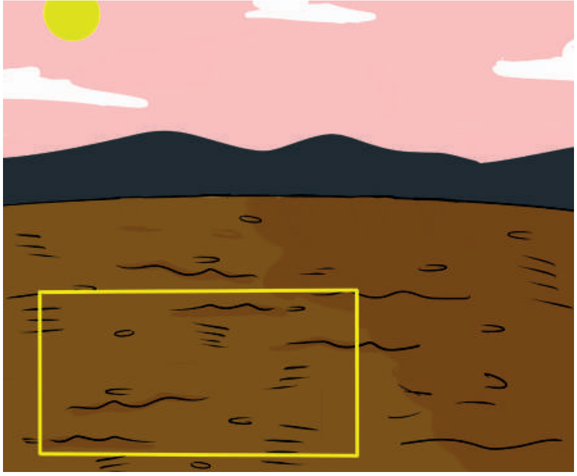
• Tipos de polígonos

Así como viste los polígonos anteriores, los polígonos tienen una clasificación según la cantidad de lados que tienen y cada uno de ellos tienen nombres que los diferencian uno de otro:

NÚMERO DE LADOS	NÚMERO DE LADOS NOMBRE	REPRESENTACIÓN GRÁFICA
3 lados	Triángulo	
4 lados	Cuadrado	
5 lados	Pentágono	

6 lados	Hexágono	
No tiene lados	Circulo	 C

Perímetros



Problema.

Wara compró un terreno en el Municipio de Mizque, el terreno es de 300 m2, sus dimensiones son 15 m de frente y 20 de fondo, tiene una forma rectangular y para evitar avasallamientos ella quiere amurallar su terreno para lo cual necesita saber cuál es el perímetro del lote, ayudémoslo hallar ese valor:

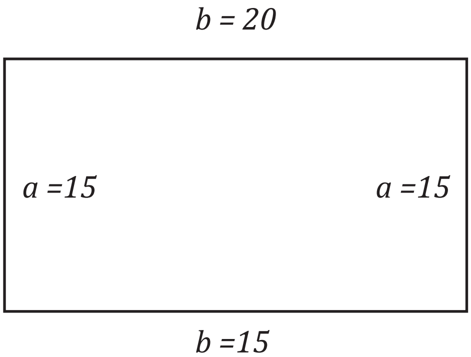
Perímetro del terreno
Perimetro es igual a la suma de sus lados

Perimetro es igual a la suma de sus lados

$$P = a + a + b + b$$

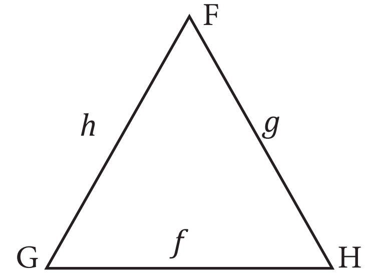
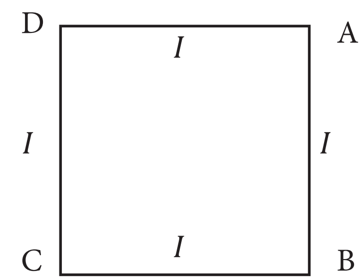
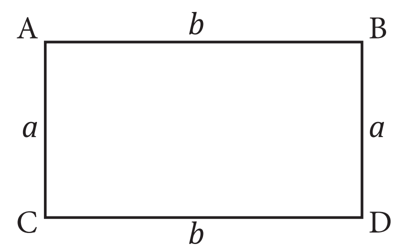
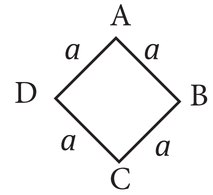
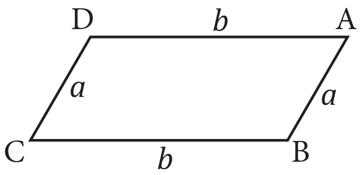
$$P = 15m + 15m + 20m + 20m$$

$$\boxed{P = 100m}$$



Respuesta: por lo tanto, el perímetro del lote es de 100 metros

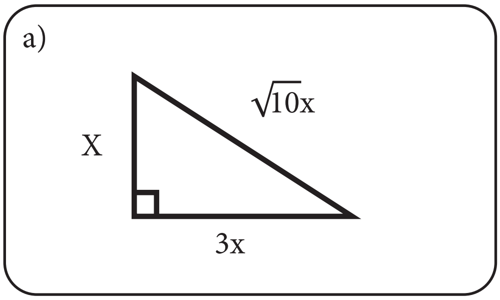
Perímetros de polígonos regulares
Por lo visto en el problema anterior, el perímetro es la suma de todos los lados de un polígono por lo que a continuación conoceremos las fórmulas para hallar el perímetro de los diferentes polígonos regulares e irregulares:

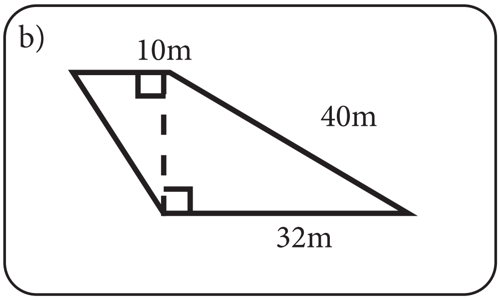
POLÍGONO	FÓRMULA	REPRESENTACIÓN GRÁFICA
Triángulo: consta de tres lados y 3 ángulos, los lados pueden ser diferentes	Triángulo: $P_{\triangle}= l_1 + l_2 + l_3$ $P_{\triangle}= f + g + h$ Donde: $P_{\triangle}$: Perimetro del triángulo l :Lado	
Cuadrado: consta de cuatro lados de iguales medidas.	Cuadrado: $P_{\square}= l + l + l + l$ $\boxed{P_{\square}= 4l}$ Donde: $P_{\square}$: Perimetro del cuadrado l :Lado	
Rectángulo: consta de 4 lados, los lados opuestos son iguales	Rectángulo: $P_{\square}= a + a + b + b$ $\boxed{P_{\square}= 2a + 2b}$ Donde: $P_{\square}$: Perimetro del rectángulo a, b :Lados	
Rombo: cuadrilátero que consta de cuatro lados iguales	Rombo *$P_{\diamond}$= a+a+a+a* *$P_{\diamond}$=4a* *Donde:* *$P_{\diamond}$= Perimetros del rombo.* *a= Lados*	
Paralelogramo: es un polígono de cuatro lados, lados opuestos y iguales paralelos	Paralelogramo *$P_{▱}$= a+b+a+b* *$P_{▱}$=2a+2b* *Donde:* *$P_{▱}$= Perimetros del paralelogramo* *a,b= Lados*	

Actividad 5

Ahora aplicaremos los conceptos y fórmulas observados en la resolución de los siguientes ejercicios:

1. Hallar el perímetro de los siguientes polígonos regulares





2. En tu cuaderno de prácticas, encuentra los perímetros en los siguientes problemas:

a) En Punata, Luis tiene un terreno de forma rectangular, su largo es de 26 metros y su ancho es la mitad del largo, hallar el perímetro del terreno (realiza un gráfico).
b) Carmen quiere saber cuál es el perímetro de su jardín, por lo que midiendocon un flexómetro se sabe que uno de los lados mide 4 metros. Hallar el perímetro del jardín.
c) Una plaza tiene la forma de rombo, la OTB tiene la intención de cercar con alambre de púas la plaza, tiene un lado que mide 45 metros, hallar el perímetro de la plaza.
d) En la localidad de Villa Tunari, se quiere saber cuánto miden los lados de un manzano, se sabe que tiene forma cuadrangular, sabiendo que el perímetro es de 600 metros. Hallar la medida de las cuadras.
e) Roberto sabe que el perímetro de una plaza triangular equilátero que se encuentra ubicado en sus CEA es de 99 metros. Hallar el valor de los lados del triángulo.

Área

El área es un concepto que relaciona a la superficie que encierra un polígono, así en el cuadrado que tiene 4 lados iguales, el área es la superficie que está encerrada por los 4 lados. Para comprender este concepto desarrollamos el siguiente problema: El curso de Aprendizajes Especializados quiere pintar la cancha de futsal del CEA, por lo que para calcular la superficie a pintar primero miden el contorno de la cancha, obteniendo los siguientes datos: largo de la cancha 40 m. y ancho 20 m. Hallar el área de la cancha.

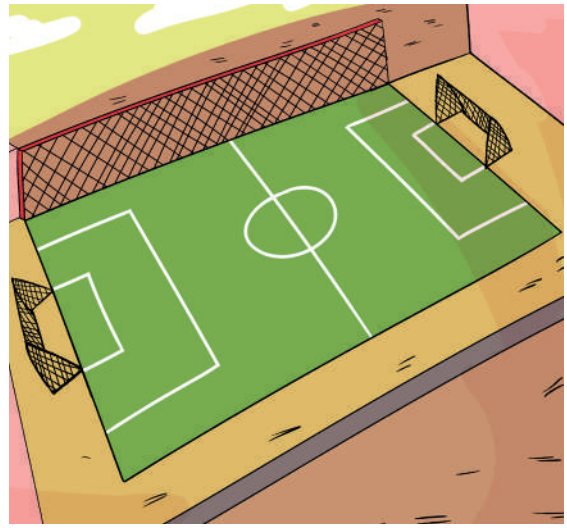
Área de la cancha de futsal del CEA

$$A_{\square} = a \cdot b$$

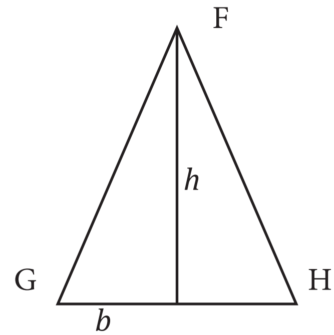
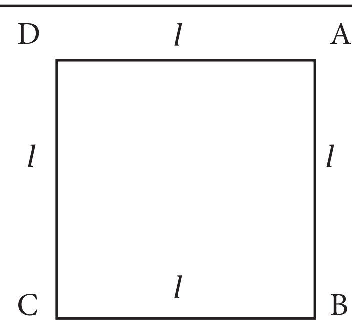
$$A_{\square} = 20m \cdot 40m$$

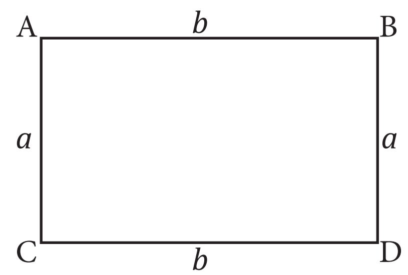
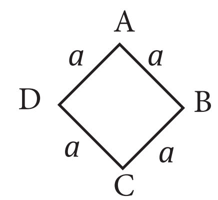
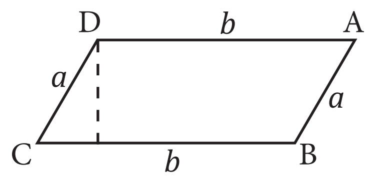
$$A_{\square} = 800\,m^2$$

Respuesta: El área de la cancha es de 800 m2



Áreas de figuras geométricas

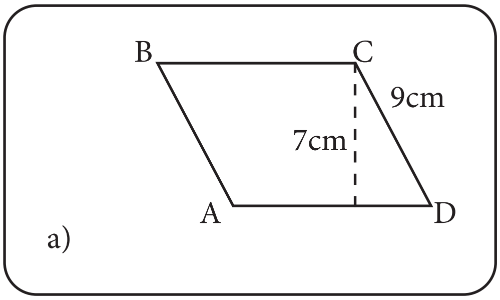
POLÍGONO	FÓRMULA	REPRESENTACIÓN GRÁFICA
Triángulo: consta de tres lados y 3 ángulos, los lados pueden ser diferentes	Triángulo: $A_{\triangle} = \frac{1}{2} b \cdot h$ $A_{\triangle} = \frac{b \cdot h}{2}$ Donde: $A_{\triangle}$: Área del triángulo b :Base h :Altura	
Cuadrado: consta de cuatro lados de igual medidas.	Cuadrado: $A_{\square} = l \cdot l$ $\boxed{A_{\square} = l^2}$ Donde: $A_{\square}$: Área del cuadrado l :Lado	

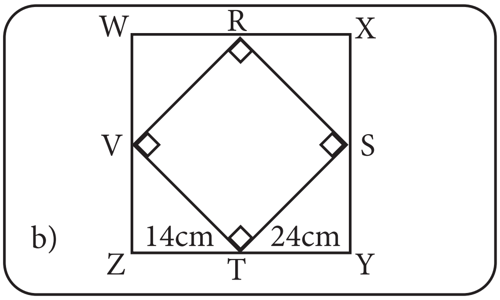
Rectángulo: consta de 4 lados, los lados opuestos son iguales	Rectángulo: $\boxed{A_{\square} = a \cdot b}$ Donde: $A_{\square}$: Área del rectángulo a : Altura b : Base	
Rombo: cuadrilátero que consta de cuatro lados iguales	Rombo $A_{\diamond} = a \cdot a$ *Donde:* $A_{\diamond}$= *Área del rombo.* *a= Lados*	
Paralelogramo: es un polígono de cuatro lados, de los cuales los opuestos son iguales y paralelos entre sí.	Paralelogramo $p = a+b+a+b$ $p = 2a+2b$ $p = 2[a+b]$	

Actividad 6

Ahora aplicaremos los conceptos y fórmulas estudiadas en la resolución de los siguientes ejercicios:

1. Hallar el perímetro y área de los siguientes polígonos.





2. En nuestro cuaderno de prácticas, encontremos las áreas en los siguientes problemas:

a) El terreno de Julia es de forma rectangular tiene 48 m. de perímetro. Calcular el área del terreno.

b) El CEA tiene un jardín de forma rectangular, si el lado mayor mide 3 veces lo que mide el lado menor y el área es de 12 m^2, hallar los lados del jardín.

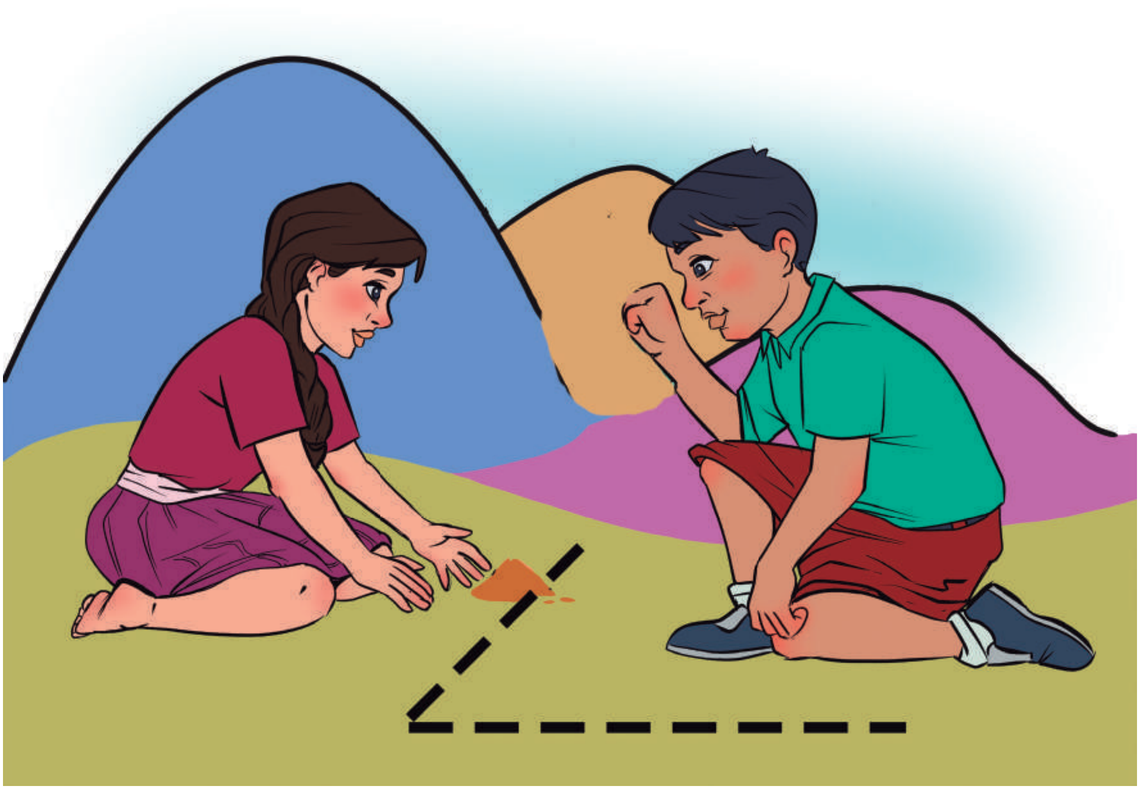
c) El mercado Triangular tiene un área de 4500 m^2, la base del mercado mide 150 m, calcular la altura del triángulo que forma el mercado.

d) Hallar el área del paralelogramo que tiene como base 10 cm y 7 cm de altura.

e) Si un terreno rectangular tiene 26 m de base y 15 m de altura, calcular el área del terreno, asimismo, calcular el precio del terreno, si el m2 cuesta Bs.1080.-

f) Una plaza de forma romboidal tiene como diagonal mayor 15 m y diagonal menor 5 m, calcular el área de la plaza, asimismo, calcular el precio de construcción de la plaza, si cada m^2 tiene un costo de Bs. 2000.-

g) Los participantes deben vaciar con cemento el piso de ingreso al CEA, para lo que miden la superficie de forma cuadrada el cual tiene 40 m^2, calcular el lado de la figura cuadrada.



Valoramos nuestros conocimientos

Completemos la siguiente tabla indicando si la situación de la vida cotidiana pertenece al cálculo del perímetro o al cálculo de área y explica su importancia.

SITUACIÓN DE LA VIDA COTIDIANA	CÁLCULO DE PERIMETRO	CÁLCULO DE ÁREA	IMPORTANCIA
Pintado de las paredes de la casa		SI	Tener ambientes que tengan un color mejoran la calidad de vida
Amurallado de un lote	SI		Conocer el perímetro de la muralla que debe construirse es importante para saber cuánto material y costo de mano de obra tendrá la muralla.

Apliquemos lo aprendido

Organizados en grupos de 3 participantes, obtengan la siguiente información:

a) Perímetro del curso donde pasas clases
b) Perímetro de la puerta y ventanas
c) Perímetro de la cancha de futsal
d) Perímetro del CEA

Organizados en grupos de 3 participantes, obtengan la siguiente información:

a) Área de las paredes del curso donde pasa clases
b) Área de la cancha de futsal
c) Área del Centro donde estudias

Seguimos practicando

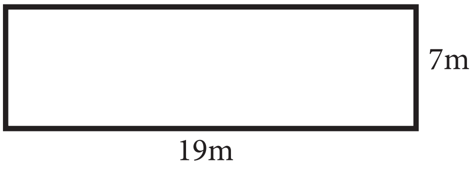
1. Relaciona con una línea el concepto geométrico con el ejemplo que corresponde a cada concepto.

- Punto
- Línea recta
- Segmento de recta

- Trozos de listones de madera
- Cabeza de alfiler, huella que deja un lápiz
- cable de alta tensión

2. Hallar el perímetro y el área de las siguientes figuras geométricas planas.

a)



b) Pintar una pared del curso de 8 m de largo y 15 m de alto ha costado Bs. 120.-
¿Cuánto costó el metro cuadrado de pintura de la pared?

R...
....
....
....
....
....

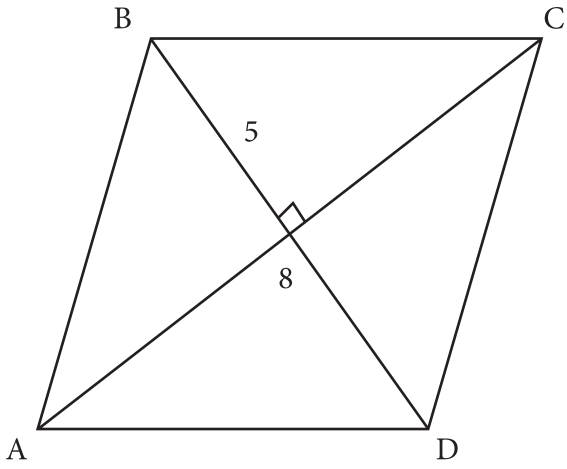
3. Resolver los siguientes problemas:

a) El terreno de 1000 m^2 que se compró para que la carrera de Agropecuaria realice sus prácticas tuvo un costo de Bs. 21 000.-

¿Cuánto costó el m^2 del terreno?

R...
....
....

b) Hallar el área y perímetro de la siguiente figura:



APRENDIZAJES ESPECIALIZADOS - MATEMÁTICA

Geometría analítica

Realicemos un croquis de la siguiente dirección: de la esquina de la calle Junín y Heroínas como punto de referencia te diriges al norte 5 cuadras, luego hacia el Este 3 cuadras.

Respondemos a las siguientes preguntas:

1. ¿Qué es el plano cartesiano?

R.-...

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2. En el croquis que realizaste, menciona cómo utilizaste un plano cartesiano.

R.- ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3. ¿En qué otras situaciones se puede utilizar el plano cartesiano?

R.- ....

....

....

....

....

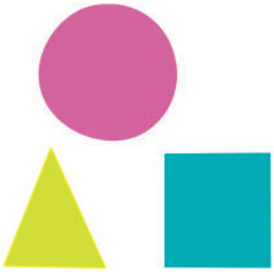
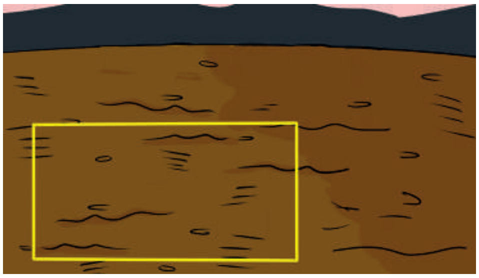
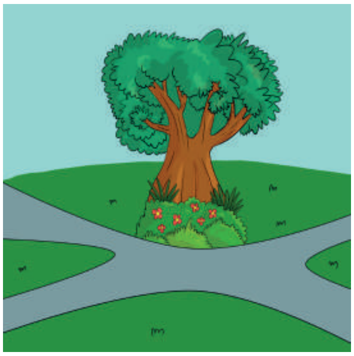
....

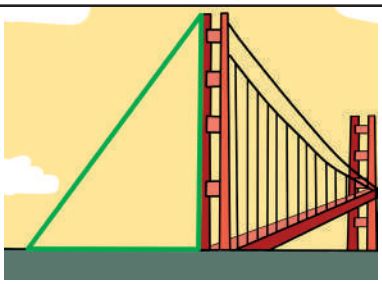
....

....

....

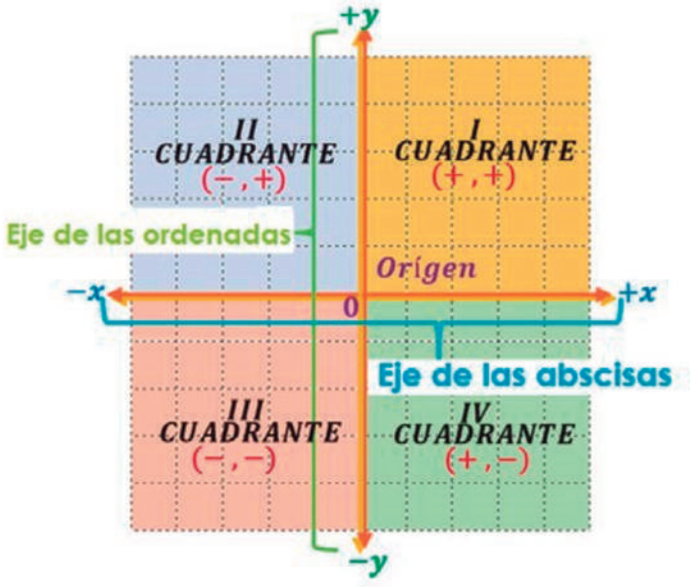
- La geometría analítica se centra en explorar detalladamente las formas geométricas y sus datos asociados, como áreas, distancias, volúmenes, puntos de intersección y ángulos de inclinación, utilizando métodos fundamentales de análisis matemático y álgebra.

Las figuras	
Sus distancias	
Sus áreas	
Puntos de intersección	

Ángulos de inclinación	
Puntos de división	
Volúmenes	

Sistema de Coordenadas

También es llamado plano cartesiano tiene las siguientes partes:

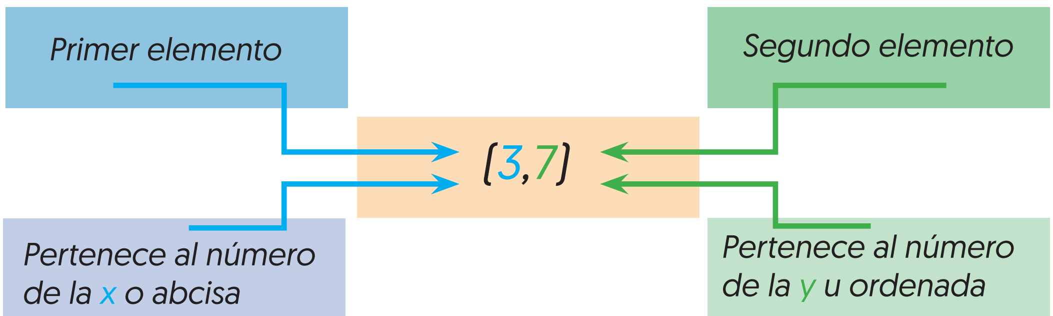


Los signos en el sistema de coordenadas

En el eje de las “X” o abscisas. Los números que están a la derecha del origen o punto “0” tienen signo positivo (+), y los números que están a la izquierda del punto cero (0) tienen signo negativo (–).

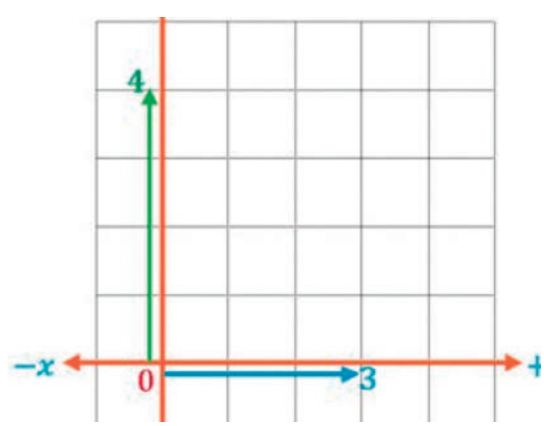
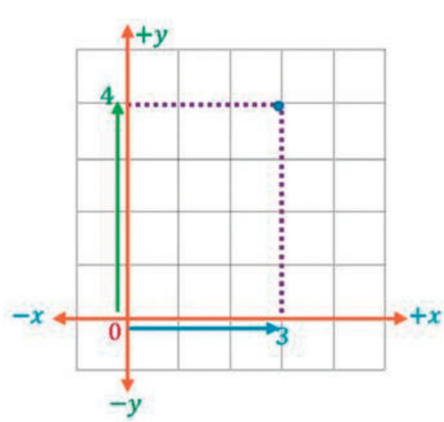
En el eje de las “Y” u ordenadas. Los números que están arriba del punto cero tienen signo positivo (+), y los números que están abajo del punto cero tienen signo negativo (-)

Par ordenado
Un par ordenado es una pareja de números agrupados entre paréntesis y separados por una coma, en la que se distingue un primer elemento y un segundo elemento.

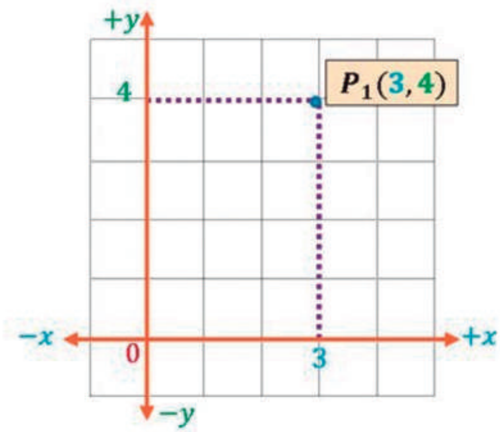


Ubicar puntos en el sistema de coordenadas

Ejemplo 1
Ubicar el punto P1 (3,4) en el plano cartesiano:

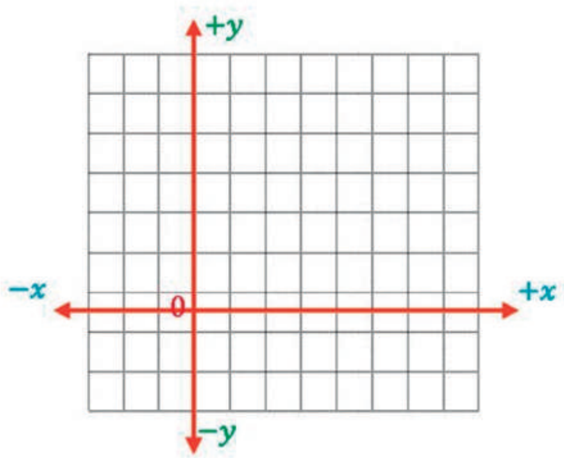
Para ubicar el punto P1 (3,4), el número 3 representa al eje X, recorremos 3 espacios del cero hacia la derecha, luego hacemos lo mismo con el número 4 recorremos 4 espacios en el eje de la Y, partiendo del cero hacia arriba.	
Ahora trazamos líneas segmentadas paralelas a los ejes.	

El punto de intersección de las líneas segmentadas es el punto P1 (3,4)



Actividad 1

Ubicar los siguientes puntos en el plano cartesiano.
A (2,5) ; B (-1,-3) ; C (5,-1/2)
Unir los puntos A,B,C y averigua que figura se formó



Actividad 2

Tenemos los siguientes puntos en el plano cartesiano:

A(___, ___) ; B(___, ___) ; C(0, -2)

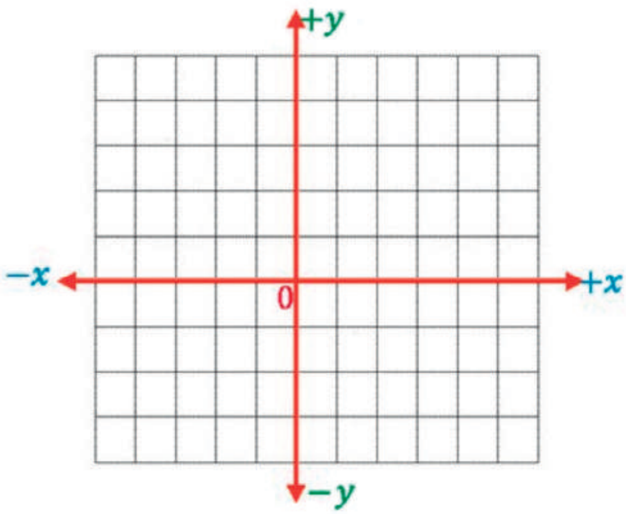
D(___, ___) ; E(___, ___) ; F(___, ___)

G(___, ___) ; H(___, ___) I(___, ___)

J(___, ___) ; K(___, ___) ; L(___, ___)

Actividad 3

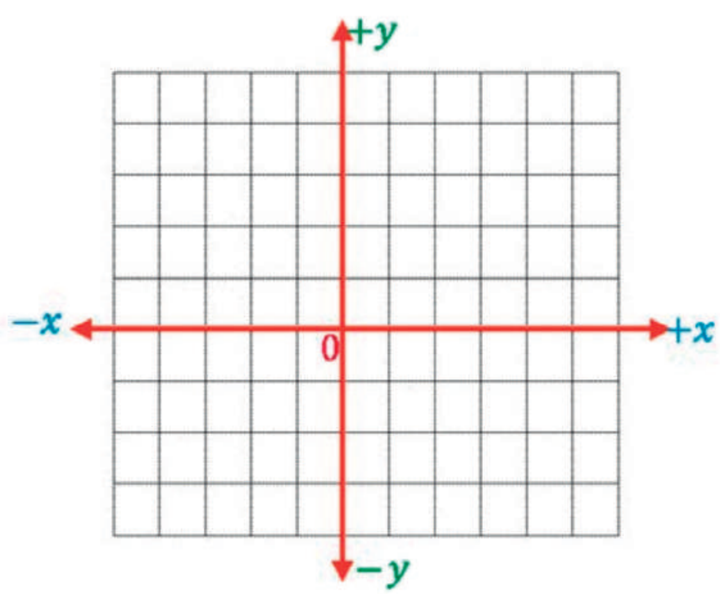
Tenemos los siguientes puntos:



A(-4, -2) ; *B(5, -4)* ; *C(6, 0)* ; *D(0, 4)E(-3, 3)* ; *F(1, -3)* ; *G(-4, 4)* ; *H(-2, -3) I(4, -2)* ; *J(4, 2)* ; *K(3,5)* ; *L(6, 4)*

Ubicar los puntos en el plano cartesiano:

De la siguiente gráfica:
Unir con rectas los puntos:
A y F; E y H; J y D.
Formar un triángulo con los puntos:
B, K y G.

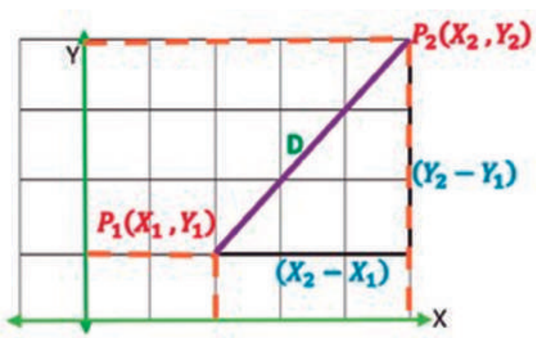


APRENDIZAJES ESPECIALIZADOS - MATEMÁTICA

Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos es la línea recta que une a esos 2 puntos como se ve en la siguiente imagen:

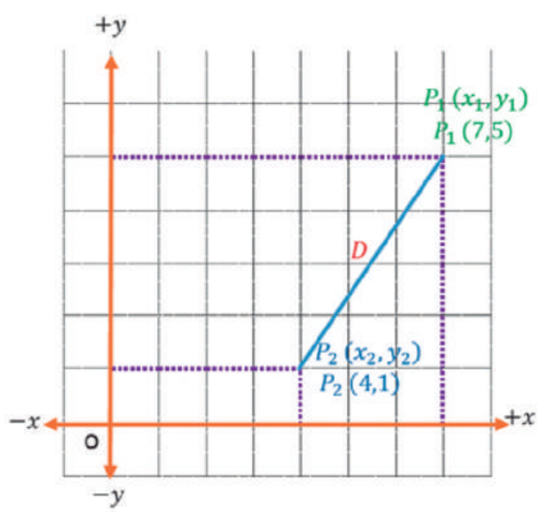
$$P_1\,(x_1 - y_1)\,;\,P_2\,(x_2 - y_2)$$

Gráficamente:	Fórmula para hallar distancia entre dos puntos
	$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ Fórmula despejada: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Ejemplo 1

Hallar la distancia entre los puntos: P1 (7,5) y P2 (4,1)

Graficando en el plano cartesiano



Resolviendo el ejercicio paso a paso

Para dar solución a la distancia entre dos puntos copiamos la fórmula despejada:

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y^1)^2}$

Reemplazamos en la fórmula los puntos

P_1 y P_2

$d = \sqrt{(7 - 4)^2 + (5 - 1)^2}$

Restamos dentro de los paréntesis.

$d = \sqrt{(3)\ 2 + (4)\ 2}$

Aplicamos la potenciación

$d = \sqrt{9 + 16}$

Sumamos dentro de la raíz

$d = \sqrt{25}$

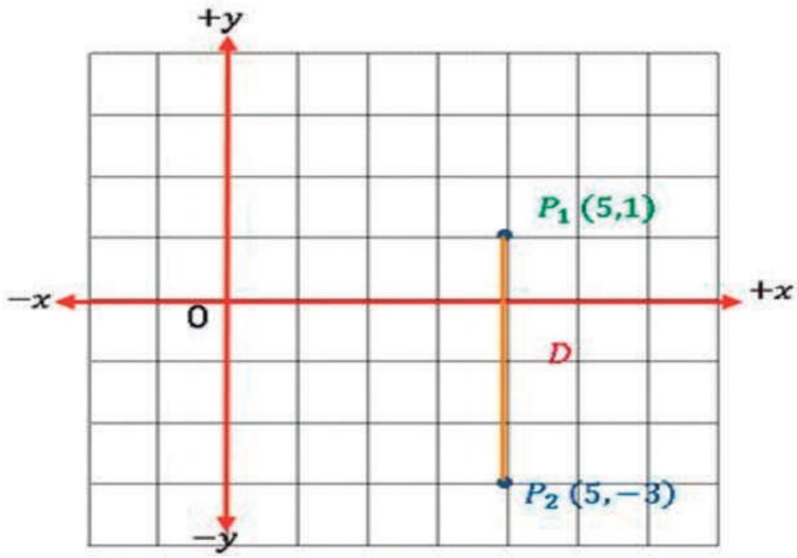
Sacamos la raíz de 25 y tenemos el resultado

$d = 5\ unidades$

Ejemplo 2

Hallar la distancia entre dos puntos:

P1 (5, 1) y P2 (5, -3)



Para dar solución a la distancia entre dos Puntos copiamos la fórmula despejada:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Reemplazamos en la fórmula los puntos

P_1 y P_2

$$d=\sqrt{(5-5)^2+(-3-1)^2}$$

Restamos o sumamos dentro de los paréntesis.

$$d=\sqrt{(0)^2+(-4)^2}$$

Aplicamos la potenciación

$$d=\sqrt{0+16}$$

Sumamos dentro de la raíz cuadrada

$$d=\sqrt{16}$$

Sacamos del signo radical y tenemos el resultado

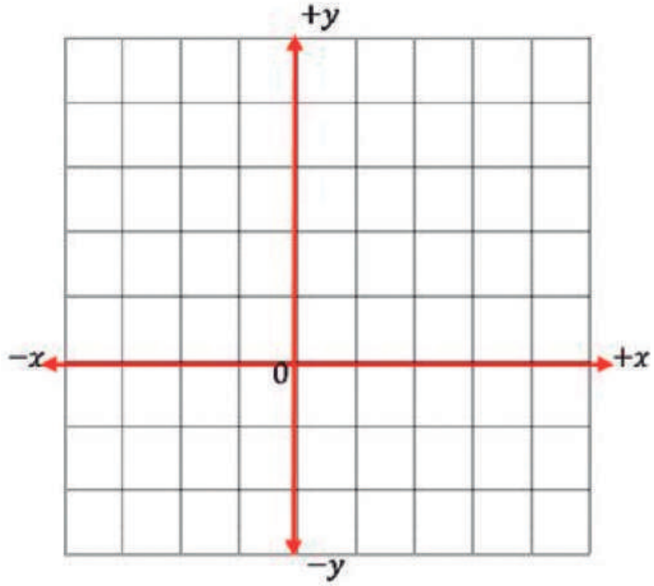
d = 4 unidades

APRENDIZAJES ESPECIALIZADOS - MATEMÁTICA

Actividad 5

Graficar y hallar la distancia entre los puntos:

P_1 (-2, 3) y P_2 (4, -2)



Para dar solución a la distancia entre dos puntos copiamos la fórmula despejada:

$$d= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

Reemplazamos:

Actividad 6

En sus carpetas de prácticas, graficar y hallar la distancia de cada lado del triángulo.

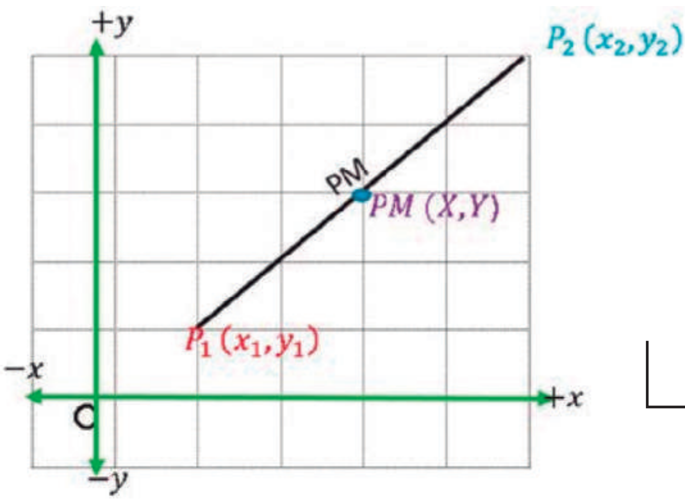
1. A(1,3) ; B(-6,0) y C(-2,2)

2. A(-2,3) ; B(-1,-1) y C(7,1)

3. A(0,4) ; B(2,5) y C(5,-2)

Punto medio de un segmento
Es el punto que se encuentra justo en la mitad de un segmento de recta.

Gráficamente:



Fórmula para hallar el punto medio:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

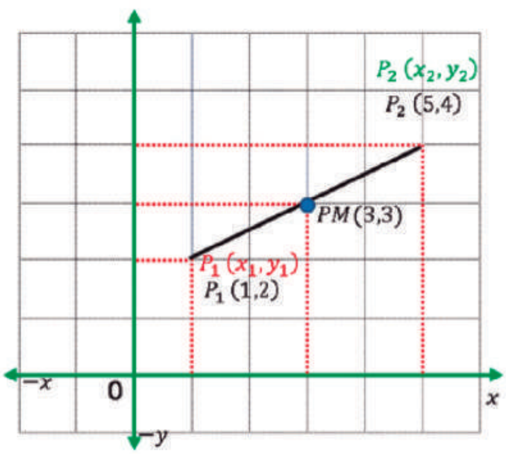
$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Para encontrar el punto medio, utilizaremos estas dos fórmulas.

Ejemplo 3

Hallar el punto medio de los siguiente ejercicio: a) P_1 (1, 2) y P_2 (5,4)

Para encontrar el punto medio del segmento representamos graficamente en el plano cartesiano:



Utilizamos las fórmulas de " x " y " y":

$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ $\qquad$ $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

Reemplazamos P_1 y P_2 a la fórmula:

$x = \frac{1 + 5}{2}$ $\qquad$ $y = \frac{2 + 4}{2}$

$x \ \frac{6}{2}$ $\qquad$ $y \ \frac{6}{2}$

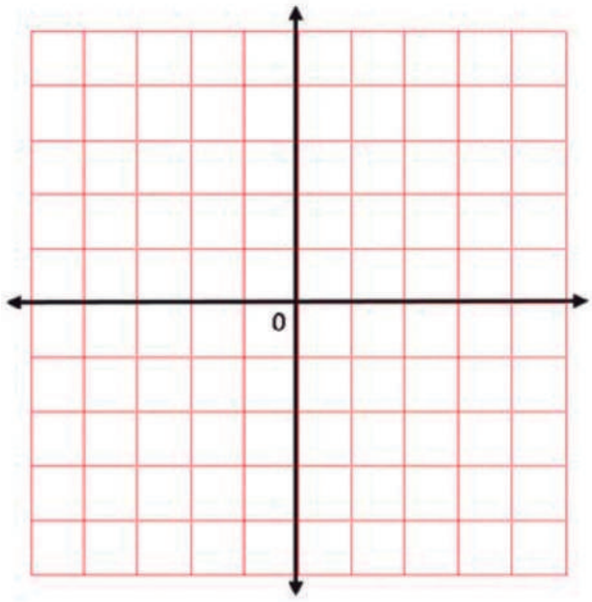
$x = 3$ $\qquad$ $y = 3$

Resultado: M (3,3)

Actividad 7

Hallar el punto medio de cada lado de la figura, los puntos son:
A(1,4) ; B(-3,0) ; C(1,-4) ; D(5,0)

GRAFICANDO EN EL PLANO CARTESIANO:



DEL SEGMENTO

Utilizamos la formula del pundo medio

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

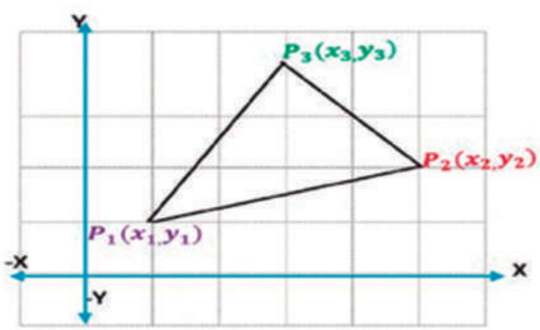
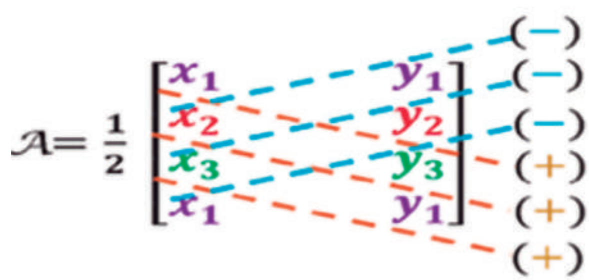
Actividad 8

En sus carpetas de práctica, hallar el punto medio de cada lado de la figura, los puntos son:

a. A(-3,2) ; B(3,-4) ; C(5,4)
b. A(3,3) ; B(-3,7) ; C(-3,-1)
c. A(-1,-3) ; B(5,-3) ; C(5,3) ; D(-1,3)

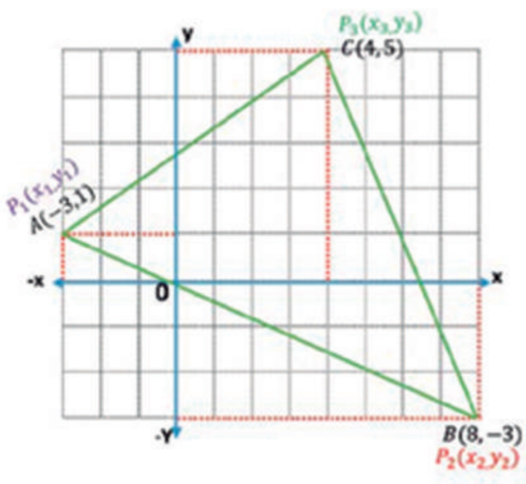
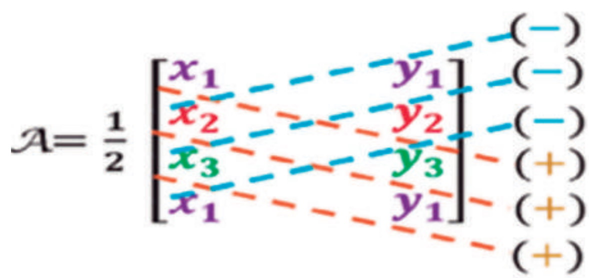
Área de un polígono en función de vértices
Se tiene tres puntos en el plano

$$P_1\ (x_1,y_1)\ ;\ P2\ (x_2,y_2)\ ;\ P_3\ (x_3,y_3)$$

<table>
<tr><th>Graficando en el plano cartesiano:</th><th>Fórmula para encontrar áreas de polígono:</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Multiplicamos de dos en dos siguiendo las líneas segmentadas:
A = $\frac{1}{2}(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_1 - x_3 \cdot y_2 - x_1 \cdot y_3)$</td></tr>
</table>

Ejemplo 4

Hallar el área de un triángulo cuyos vértices son: A (-3,1), B (8,-3), C (4,5)
NOTA. Para anotar los puntos en la fórmula, hay que hacerlo en sentido contrario a las agujas del reloj.

<table>
<tr><th>Los vértices A, B y C graficamos en el plano cartesiano al sentido contrario a las agujas del reloj:</th><th>Para encontrar el área del triángulo utilizamos la fórmula:</th></tr>
<tr><td>
</td><td>

Primer paso: multiplicamos hacia la derecha siguiendo las líneas segmentadas de color naranja, después de color celeste, tomando en cuenta la ley de signos:

$A = \frac{1}{2}(9+40+4-8+12+15)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ahora hacemos sumas dentro del paréntesis, primero sumamos todos los positivos y después sumamos todos los negativos:

$A = \frac{1}{2}(80 - 8)$ restamos dentro del paréntesis.

$A = \frac{1}{2}(7^2)$ restamos dentro del paréntesis.

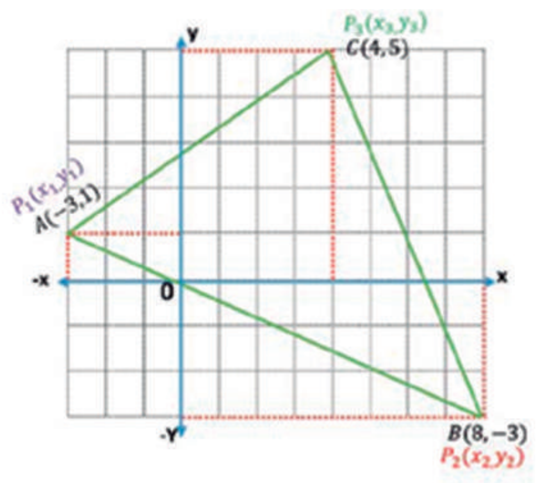
A = realizamos la división.

$A = 36\ u^2$

Dentro del triángulo tenemos un área de 36 unidades cuadradas.</td></tr>
</table>

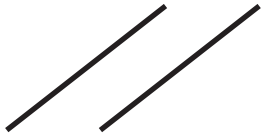
Actividad 9

Encontrar el área del triángulo: A(3,3) ; B(-3,7) ; C(-3,-1)

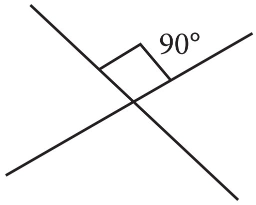
<table>
<tr><td>Los vértices A, B y C graficamos en el plano cartesiano al sentido contrario de las agujas del reloj:</td><td>Para encontrar el área del triángulo utilizamos la fórmula:</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Anotamos los pares, en sentido contrario a las agujas de reloj.
$A = \frac{1}{2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
</table>

La línea recta
La recta es un conjunto infinito de puntos consecutivos que tienen una misma dirección, sin curvas ni ángulos.
Tipos de rectas
Las rectas pueden clasificarse en:

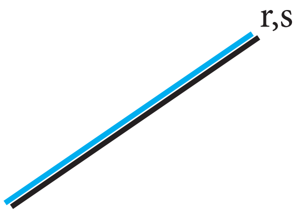
a) Rectas paralelas, son aquellas que nunca se cortan, aunque estas se extiendan hasta el infinito nunca llegar a tocarse, manteniendo la misma distancia entre ellas.



b) Rectas perpendiculares, estas rectas se cortan únicamente en un punto, además estas rectas son perpendiculares o que forman un ángulo de 90°.



c) Rectas coincidentes, son líneas que tienen todos sus puntos en común, llegando a ser idénticas.



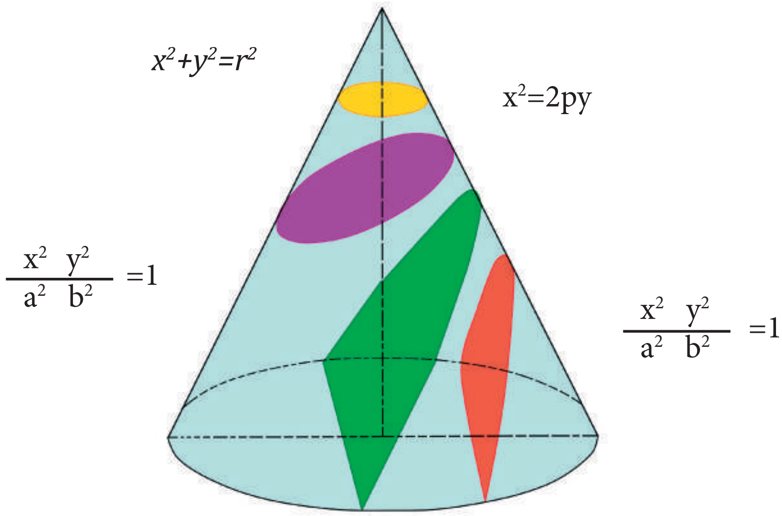
Ecuación de la recta
La recta está determinada si se conoce uno de sus puntos y su ángulo de inclinación
(pendiente).

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Donde m, es la pendiente:

$$m = \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}$$

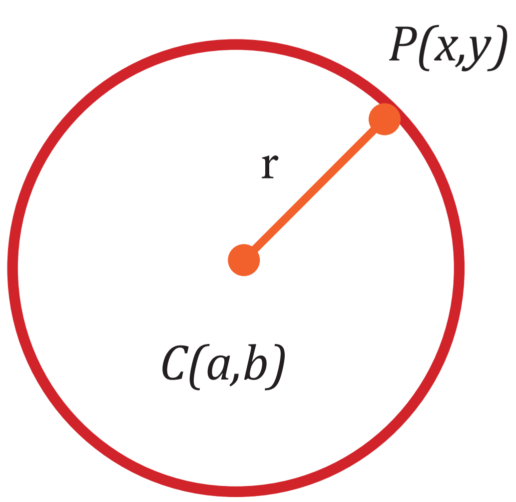
Geometría analítica



Como puedes ver en las figuras geométricas representadas arriba, se pueden transformar curvas geométricas en ecuaciones matemáticas gracias a la geometría analítica. En este caso particular, estas curvas (circunferencia, elipse, parábola e hipérbola) pertenecen a un grupo geométrico llamado secciones cónicas; puedes saber más sobre ellas en el enlace de más arriba (al principio de la página).

La circunferencia

La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.



Por tanto, todos los puntos de una circunferencia están a una misma distancia de su centro.

La ecuación ordinaria de la circunferencia es:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Donde:

r : es el radio de la circunferencia.

a y b, son las coordenadas del centro de la circunferencia

Veamos cómo se calcula la ecuación ordinaria de una circunferencia con un ejemplo:
Determina la ecuación ordinaria de la circunferencia de radio 4 cuyo centro es el punto C: (2, -1)

La fórmula de la ecuación ordinaria de una circunferencia es:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Por tanto, sustituimos los valores de r, a y b. en la ecuación de la circunferencia y obtendremos:

$$(x-2)^2+(y-(-1))^2=4^2$$

Así que la ecuación ordinaria de la circunferencia es:

$$(x-2)^2+(y+1)^2=16$$

Si desarrollamos las igualdades notables (o productos notables):

$$(x^2-2x*2+2^2)+(y^2+2y*1+1^2)=16$$

$$(x^2-4x+4)+(y^2+2y+1)=16$$

$$x^2-4x+4+y^2+2y+1=16$$

$$x^2+y^2-4x+2y-11=0$$

De manera que la ecuación general de la circunferencia es:

$$x^2+y^2-4x+2y-11=0$$

Hallar la ecuación de la circunferencia:

1) C: (3,2) y r=3
2) C: (-2,2) y r=2
3) C: (4,-1) y r=4
4) C: (-3,-1) y r=5
5) C: (0,0) y r=6

Valoramos nuestros conocimientos adquiridos

Ahora valoremos nuestros conocimientos con el siguiente cuadro.
Marca con una x

DIM.	INDICADORES	SI	AVECES	NO
SER	¿Trabajas colaborando con los compañeros que tienen dificultades?			
SABER	¿Aplicas los conceptos y definiciones planteados en este tema, en la resolución de ejercicios?			
HACER	¿Realizas los ejercicios y actividades de la cartilla?			
DECIDIR	¿Realizas todas las tareas asignadas?			

Apliquemos lo aprendido

- ¿Ubicamos en un eje cartesiano las esquinas de tu cuarto de tal manera que lleguen hacer puntos. A partir de esos datos calculamos cuántos metros cuadrados tiene nuestro dormitorio?

R. ____

____

____

____

____

____

• ¿Cuántos datos mínimo necesitamos para realizar una circunferencia y cuáles son?

R. ____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

• Mencionamos donde podemos encontrar en nuestro diario vivir lo visto en este tema

R. ____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

Bibliografía

- Aguilar, A. Bravo, F. Gallegos, H. Céron, M. Reyes, R. (2009). "Matemáticas Simplificadas". Colegio Nacional de Matemáticas.

- Alexander. D, Koeberlein. G, (2013). "Geometría 5ta edición". Cengage Learning Editores.

- Clemens, S. O´daffer, P. Cooney, T. (1998). "Geometría con aplicación y solución de problemas" (4ta reimpresión). Addison Wesley Longman de México.

- Earl, W. Swokowsky; Jeffery, A. Cole.(2009). "Algebra y trigonometría con Geometría Analítica". Editorial Thomson. Duodécima edición. México.

- Guía de trabajo Matemática Nivel Aprendizajes Especializados. (2022). Dirección General de Educación de Adultos. Editorial del Estado Plurinacional de Bolivia.

- Ledezma O. (2007). "Matemática 2". Santillana de Ediciones.

- Paz A.(1938) "Trigonometría" Editorial Minerva Books 137 West 14 th Street. New York N .Y. 10011.

- Quispe A. (2019) "Matemática 5" Editorial Abya Yala sexta edición El Alto La Paz.

ESTADO PLURINACIONAL DE
BOLIVIA

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

VICEMINISTERIO DE
EDUCACIÓN ALTERNATIVA Y
ESPECIAL

minedu.gob.bo @minedubol minedu_bol

Av. Arce No. 2147 - Teléfonos: (591 -2) 2442144 - 2681200
La Paz - Bolivia