BICENTENARIO DE BOLIVIA

ESTADO PLURINACIONAL DE BOLIVIA

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

MATEMÁTICA

APRENDIZAJES COMPLEMENTARIOS

EDUCACIÓN SECUNDARIA DE PERSONAS JÓVENES Y ADULTAS

GUÍA DE TRABAJO

VICEMINISTERIO DE EDUCACIÓN ALTERNATIVA Y ESPECIAL
DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN ALTERNATIVA

MINISTERIO DE EDUCACIÓN
GUÍA DE TRABAJO APRENDIZAJES COMPLEMENTARIOS - MATEMÁTICA
EDUCACIÓN DE PERSONAS JÓVENES Y ADULTAS

Edgar Pary Chambi
MINISTRO DE EDUCACIÓN

Viviana Mamani Laura
VICEMINISTRA DE EDUCACIÓN ALTERNATIVA Y ESPECIAL

Ximena Aguirre Calamani
DIRECTORA GENERAL DE EDUCACIÓN ALTERNATIVA

EDICIÓN, DISEÑO E ILUSTRACIÓN:
Viceministerio de Educación Alternativa y Especial
Dirección General de Educación Alternativa

Cómo citar este documento:
Ministerio de Educación. “Matemática - Guía de trabajo, Aprendizajes complementarios”. La Paz, Bolivia.

Depósito legal:
4 - 1 - 350 - 2023 P.O.

Impresión:
EDITORIAL DEL ESTADO PLURINACIONAL DE BOLIVIA

LA VENTA DE ESTE DOCUMENTO ESTÁ PROHIBIDA

Av. Arce, Nro. 2147
www.minedu.gob.bo

Índice

Presentación

Con el objetivo de garantizar una educación de calidad en los procesos de aprendizaje, el Ministerio de Educación del Estado Plurinacional de Bolivia, a través del Viceministerio de Educación Alternativa y Especial y la Dirección General de Educación de Alternativa, proporciona valiosos recursos educativos destinados a la formación de Personas Jóvenes y Adultas en el presente periodo.

Es fundamental tener en cuenta que las Personas Jóvenes y Adultas desempeñan un papel activo en los cambios sociales. Por este motivo, la Educación Alternativa les brinda oportunidades de formación y capacitación que les permiten acceder al conocimiento en diversos campos de saberes. Esto implica una formación permanente, continua y equitativa, enmarcada en el concepto filosófico del Vivir Bien.

Los materiales educativos que se presentan en este contexto tienen un enfoque inclusivo y están diseñados para atender la diversidad de características de los estudiantes/participantes. Han sido elaborados siguiendo las orientaciones del currículo, con el propósito de lograr una formación integral que abarque las dimensiones del ser, saber, hacer y decidir. Además, se consideran los objetivos holísticos, los momentos metodológicos y la evaluación, teniendo en cuenta los diferentes contextos y modalidades de atención del Sistema Educativo Plurinacional. Todo esto se encuentra en línea con el Modelo Educativo Sociocomunitario Productivo establecido en la Ley de Educación N° 070 “Avelino Siñani – Elizardo Pérez”.

Es importante resaltar que esta guía de trabajo no sigue el formato tradicional de un texto de aprendizaje, sino que tiene un enfoque orientador. Su propósito es promover el autoaprendizaje y la autonomía de los participantes. Asimismo, plantea procesos educativos flexibles que se adaptan a la diversidad cultural y a las múltiples ocupaciones de los participantes. Utiliza una variedad de recursos educativos como videos, textos de apoyo, entre otros, con el fin de fortalecer el aprendizaje de los participantes.

Estimados estudiantes/participantes y comunidad en general, los invitamos a formar parte de la Educación Alternativa y a continuar con una formación integral, tanto humanística como técnica. Esto nos permitirá avanzar juntos por una educación de calidad rumbo al Bicentenario.

Edgar Pary Chambi
Ministro de Educación

Orientaciones para uso de la guía de trabajo

Para aprovechar al máximo esta guía y lograr el desarrollo de las actividades propuestas, utilizamos la siguiente iconografía que indica el inicio de los momentos metodológicos y las actividades correspondientes.

Objetivo holístico: orienta el proceso formativo articulado a las dimensiones Ser, Saber, Hacer y Decidir.

Práctica: indagamos conocimientos previos a partir de nuestra experiencia y realidad antes de abordar los contenidos.

Teoría: manejamos y comprendemos conceptos y categorías, que posibiliten profundizar el debate que te propone cada Unidad Temática.

Valoración: nos apropiamos de criterios que nos permitan profundizar en nuestra reflexión y análisis de la realidad a partir de los contenidos.

Producción: promovemos la aplicación creativa del conocimiento, donde los participantes compartirán los resultados de su proceso formativo.

Actividades: desarrollamos actividades que incluyan consignas concretas y precisas que faciliten la internalización de los conocimientos adquiridos.

Escanear código QR: nos invita a explorar temáticas complementarias a los contenidos desarrollados. Al escanearlo, podremos acceder a una variedad de recursos audiovisuales.

Módulo 1:

Ecuaciones y su relación con las actividades del trabajo

Objetivo holístico del módulo

Fortalecemos los principios, valores socio comunitarios y la espiritualidad desarrollando el pensamiento crítico, reflexivo, descolonizador, transformador en diálogo y consenso, a partir de las cosmovisiones, filosofías y literaturas propias y diversas para Vivir Bien en comunidad, con la Madre Tierra y el Cosmos.

Unidad temática N.º 1:

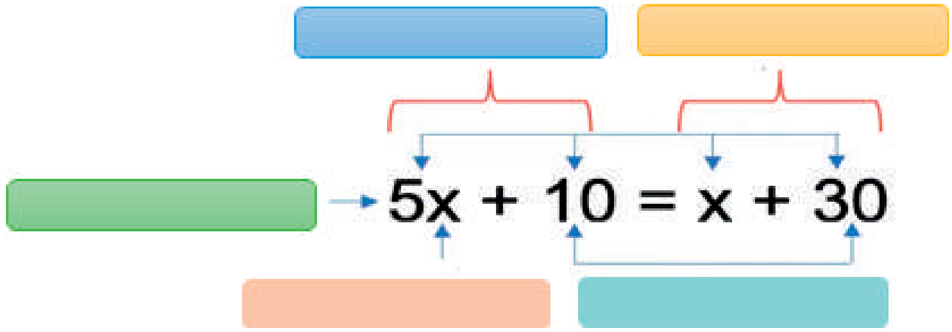
Ecuaciones e inecuaciones de primer grado

Con la ayuda de los incisos, emparejemos la expresión matemática con el enunciado:

La mitad de un número (A)	X+15
La tercera parte de un número (B)	2/3 X
Un número aumentado en siete (C)	X/3
Un número disminuido en 5 (D)	X/4+6
El doble de un número (E)	(X+5)/3
El triple de un número (F)	X/2
El exceso de un número en 15 (G)	3X

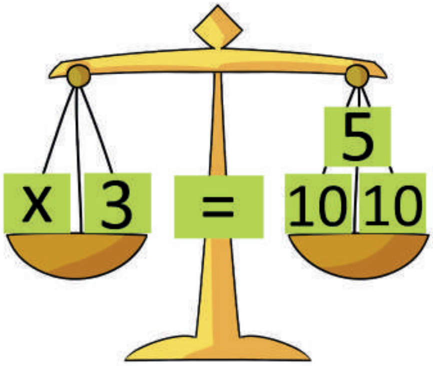
La cuarta parte de un número más 6 (H)	X-5
La tercera parte de la suma de un número y 9 más 5 (I)	X+7
Un número más su cuarta parte (J)	X+X/4
Dos terceras partes de un número (K)	2X

Con la ayuda de la/el facilitadora/or completa los recuadros de colores con los datos que representan:



Analiza y representa matemáticamente la siguiente igualdad:

Representa la igualdad matemática entre las expresiones que se encuentran en los platillos de la siguiente balanza:

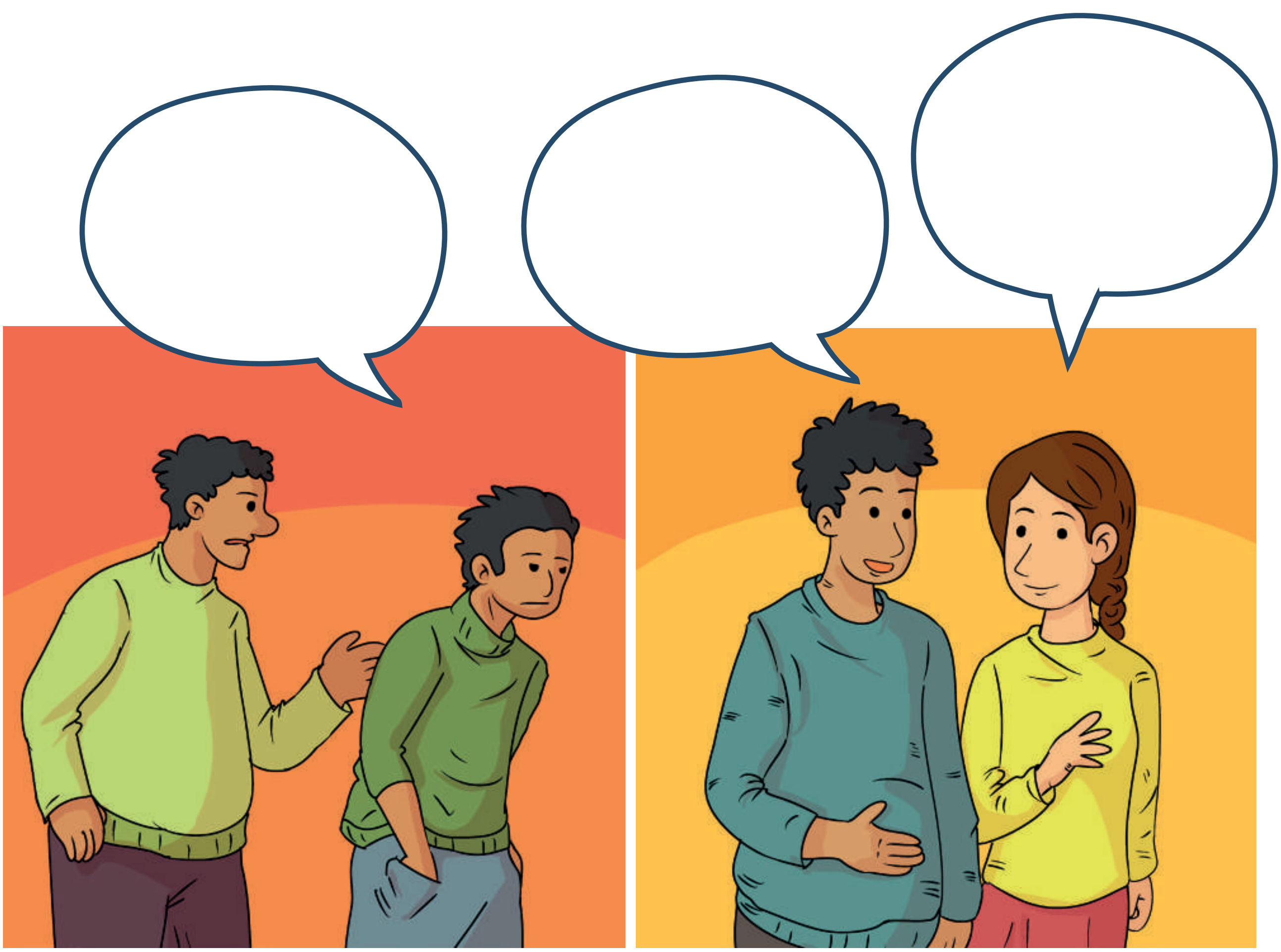


En nuestro país, desde el año 1992, existe el Decreto Supremo N° 2912, que declara como prioridad la realización de campañas de reforestación en todo el territorio nacional. Siguiendo esta consigna, el Centro de Educación Técnica Alternativa 'Virgen del Rosario' del distrito de Punata llevó a cabo, en el presente año, una campaña de reforestación. Las estudiantes Vanessa y Carminia informaron al profesor que entre ambas plantaron 22 plantines, siendo que Vanessa plantó 6 plantines más que su compañera Carminia.

¿Cómo puede el profesor saber cuántos plantines plantó cada una de las estudiantes?

R.- ....

Observemos con atención las dos imágenes y escribamos lo que piensas que las personas están conversando:



¿Alguna vez tuviste una pelea con alguna persona?, como piensas que se deberían solucionar los problemas entre dos personas

Revisemos la teoría

Igualdades

Es la expresión donde dos cantidades algebraicas tienen el mismo valor.

Hasta el siglo XVI, las multiplicaciones se consideraban tan difíciles que sólo se enseñaban en las universidades.

5=2+3	**$3x^2\ 2=4x+15$**
El valor de 5 es igual al valor de la suma de 2+3	El valor de $3x^2$ tiene el mismo valor de la suma de 4x+15

¿Qué es una ecuación?

Se puede describir una ecuación como una igualdad entre dos expresiones matemáticas en las que es posible identificar una o más variables.

Ejemplo 5x-4=2x+5

Pasos para solucionar una ecuación

- Eliminar paréntesis o denominadores, reducir términos semejantes si los hay.
- Ubicar la variable que se quiere despejar.

- Despejar el término que contiene la incógnita.
- Despejar la incógnita.

¿Por qué es importante las ecuaciones en la vida cotidiana?

Las ecuaciones son fundamentales en la interpretación y resolución de problemas de la vida diaria, ya que nos permiten determinar un valor específico y también nos posibilitan despejar una incógnita. Se utilizan en diversas áreas de estudio, tales como finanzas, mecánica, informática, ingeniería, contabilidad, entre otras.

¿Qué es y para qué sirven las ecuaciones?

Las ecuaciones son herramientas fundamentales para resolver una variedad infinita de problemas matemáticos y de cualquier otra índole, con aplicaciones tanto en la vida cotidiana como en la investigación y desarrollo de proyectos científicos.

Ecuaciones lineales con una incógnita

Aprendamos juntos a resolver ecuaciones

a. Ejemplo

$$4x+3=21-2x$$

1. Agrupar los términos que contienen la incógnita X en el primer miembro.

$$4x+2x=21-3$$

Es importante recordar que cuando un término pasa al otro lado de la igualdad, su signo cambia (si es positivo pasa a ser negativo y viceversa).

2. Se realizan las operaciones respectivas.

$$6x=18$$

En este caso, corresponde una suma en uno de los miembros y una resta en el otro, lo que da como resultado:

3. Se despeja la X.

x=18/6

Pasando el término que tiene adelante al otro lado de la ecuación, con signo opuesto. En este caso, el término está multiplicando, así que ahora pasa a dividir.

4. Se resuelve la operación.

x=3

valor de X.

Verificamos: Remplazamos el valor de x encontrado.

4x+2x=21-3

4*(3)+2*(3)=21-3

12+6=18

18=18

La igualdad es comprobada, ambos miembros tienen el mismo valor

b. Ejemplo

2(2+2x)=12
(Ecuación de primer grado con paréntesis)

1. Multiplicar el coeficiente, por todo lo que está dentro del paréntesis,

4+4x=12

Con lo cual la ecuación quedaría de la siguiente forma

2 Después de la multiplicación se resuelve como en el ejemplo numero 1.

4+4x=12

4x=12-4

x=8/4

x=2

Verificamos: Remplazamos el valor de x encontrado.

$$4+4x=12$$

$$4+4*(2)=12$$

$$4+8=12$$

$$12=12$$

La igualdad es comprobada, ambos miembros tienen el mismo.

c. Ejemplo: Ecuación de primer grado con fracciones y paréntesis.

$$\frac{3x+1}{2}+\frac{1-x}{6}=\frac{5x+4}{4}$$

Aunque las ecuaciones de primer grado con fracciones parecen complicadas, en realidad solo llevan algunos pasos extras antes de convertirse en una ecuación básica.

1. En primer lugar, hay que obtener el mínimo común múltiplo de los denominadores.

$$\frac{3x+1}{12}+\frac{1-x}{12}=\frac{5x+4}{12}$$

(El múltiplo más pequeño que sea común a todos los denominadores presentes). En este caso, el mínimo común múltiplo es 12.

2. Luego, se divide el denominador común entre cada uno de los denominadores originales.

$$\frac{6\,(3x+1)}{12}+\frac{6\,(1-x)}{12}=\frac{3\,(5x+4)}{12}$$

El producto resultante va a multiplicar al numerador de cada fracción, los cuales ahora van entre paréntesis.

3. Se multiplican los coeficientes por cada uno de los términos que se encuentran dentro de los paréntesis.

$$\frac{18x+6}{12}+\frac{(2-2x)}{12}=\frac{15x+12}{12}$$

Después de la multiplicación de factores, se procede a simplificar la ecuación eliminando los denominadores comunes.

$$18x+6+2-2x=15x+12$$

$$18x-2x-15x=12-6-2$$

$$18x-17x=12-8$$

$$1x=4$$

$$x=4/1$$

$$x=4$$

El resultado es una ecuación de primer grado con una incógnita, que se resuelve de la manera habitual.

DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN ALTERNATIVA

Verificamos: remplazamos el valor de x encontrado en el paso número (4)

18x+6+2-2x=15x+12

18*(4)+6+2-2*(4)=15*(4)+12

72+6+2-8=60+12

72=72

La igualdad es comprobada, ambos miembros tienen el mismo valor

Con la ayuda de tu facilitador/a realiza ejercicios en tu cuaderno aplicación.

Gráficos

¿Por qué graficar una ecuación?

Las ecuaciones de primer grado también llamadas ecuaciones lineales, llamada así justamente porque la gráfica de la misma es una línea recta, graficarla nos muestra de manera práctica la aplicación de las ecuaciones en situaciones reales y su aplicación en la resolución de problemas de la vida cotidiana.

Imagina la siguiente ecuación

2x - 1 = x + 4

Pasos para graficar una ecuación:

- Identificar la variable y ambos miembros de la ecuación.
- Resolver la ecuación aplicando el método ya conocido.
- Despejar y resolver la variable de cada miembro independientemente.
- Graficar el punto de intersección y los valores de x hallados en cada miembro.

¿Qué necesitamos conocer para graficar una ecuación?

- 'Plano cartesiano
- 'Signo (+, -) de cada uno de los cuadrantes del plano cartesiano.
- 'Escalas de relación matemática.

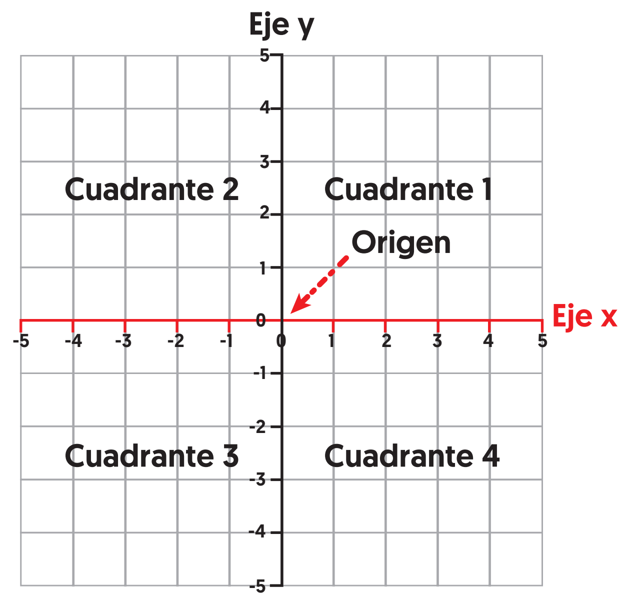
¿Qué es el plano cartesiano?

El sistema cartesiano está formado por dos rectas numéricas perpendiculares, una horizontal y otra vertical, que se cortan en un punto llamado origen o punto cero.

¿SABÍAS QUE?

El plano cartesiano tuvo su origen de la mano de René Descartes (1596-1650). René Descartes conocido filósofo e influyente matemático fue el fundador de la geometría analítica.

¿Qué signo lleva cada uno de los cuadrantes?



a. Ejemplo

$$2x-1=x+4$$

1. Identificar la variable y ambos miembros de la ecuación

Primer miembro → $2\,x\,-1 = x + 4$ ← **Segundo miembro**

Incógnita o variable

2. Resolver la ecuación aplicando el método ya conocido.

$$2x-1=x+4$$

$$2x-x=4+1$$

$$x=5$$

Resolviendo la ecuación con el método aprendido, se obtiene que el valor es x = 5.
Este valor será el punto de intersección de las rectas.

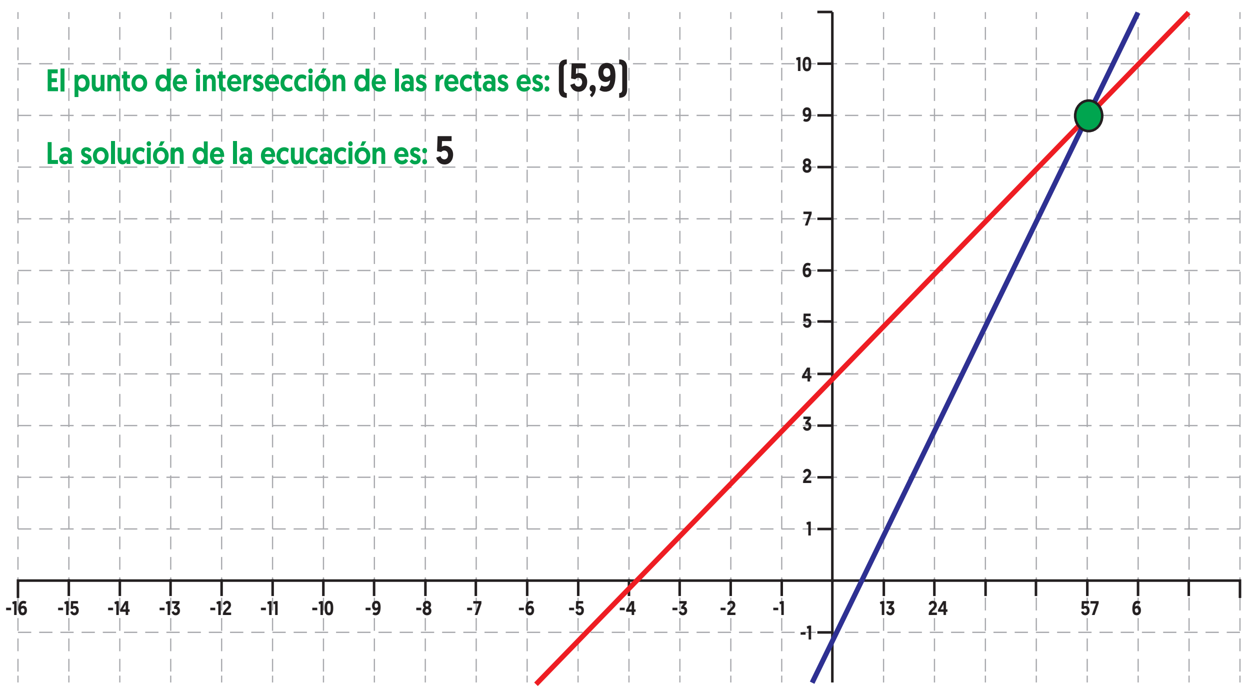
3. Despejar y resolver la variable de cada miembro independientemente

Primer miembro	**Segundo miembro**
y=2x-1	**y=x+4**
y=2(5)-1	**y=(5)+4**
y=10-1	**y=9**
y=9	

Para graficar una ecuación de primer grado de una incógnita debemos agregar una variable más, a la que le asignaremos la letra (y).

Debemos resolver la ecuación con el método ya conocido, hallando el valor de la variable (y) reemplazando el valor de x = 5.

Observemos que remplazando el valor de x = 5, en ambos miembros da como resultado y = 9; por tanto, el punto de intersección es (5,9).



Problemas que se resuelven con ecuaciones de primer grado con una incógnita, problemas situacionales

Existen dos hermanos, Valeriano tiene dos años menos que Fernando y la suma de sus edades da un total de 38 años ¿Qué edad tiene cada uno de ellos?

x = Edad de Fernando	Representaremos la variable x para representar la edad de Fernando.
x – 2 = Edad de Valeriano	Analizando podemos determinar la variable para encontrar la edad de Valeriano.
x+(x-2) = 38 Edad de Valeriano Edad de Fernando	Armamos la ecuación, tomando en cuenta la suma de ambas edades.
x+x-2=38 x+x=38+2 2x=40 x=40/2 x=20	Resolvemos la ecuación y determinamos la edad de Fernando, y Valeriano.
Como x era la edad de Fernando, entonces tiene 20 años.	
x-2=20 x=20-2 x=18	
Deducimos que la edad de Valeriano es 18 años.	

Las edades de los dos hermanos tienen que sumar 38 años.

20+18 = 38 / El resultado es correcto.

Ejemplo: Un día, el hermano Juan fue a la tienda a comprar una camisa y un sombrero para el desfile, pagó un total de Bs. 145. El sombrero cuesta Bs. 25 menos que la camisa.

¿Cuánto cuesta cada cosa?

x = Costo de la camisa	Representaremos la variable x para representar el costo de la camisa.
x – 25 = Costo del sombrero	Analizando podemos determinar la variable para encontrar el costo del sombrero.
x+(x-25) = 145 Costo del sombrero Costo de la camisa	Armamos la ecuación, tomando en cuenta la suma de ambas prendas.
x+x-25=144 x+x=145+25 2x=170 x=170/2 x=85	Resolvemos la ecuación y determinamos el costo de ambas prendas.
Como x era el costo de la camisa, entonces esta cuesta 85 Bs.	
x-25=85 x=85-25 x=60	
Deducimos que el costo del sombrero es 60 Bs.	

Comprobación o verificación

Los precios de la camisa y el sombrero tienen que sumar 145.
85 + 60 = 145 / Los resultados son correctos.
Con la ayuda de tu facilitador/a realiza ejercicios en tu cuaderno aplicación.

Inecuaciones de primer grado

Las inecuaciones son también llamadas desigualdades, son problemas matemáticos que contienen una o más incógnitas, cuyos miembros están conectada s a través de los signos: mayor que >, menor que <, menor o igual que ≤, así como mayor o igual que ≥.

Estas desigualdades se verifican para un conjunto amplio de valores de las incógnitas.

Ejemplo:

$5x-4=2x+5$ **Ecuación**

$9x-4\leq x+2$ **Inecuación**

Pasos para solucionar una inecuación

- Se sigue el mismo procedimiento para resolver una ecuación.
- Si se debe multiplicar por números negativos se debe cambiar el signo de la desigualdad.
- Determinar el conjunto de valores que tomará la incógnita.
- Graficar el conjunto de valores que tomara la incógnita.

¿Por qué son importantes las inecuaciones en la vida cotidiana?

Las desigualdades nos permiten mejorar nuestra percepción del comportamiento de un problema matemático en la vida real, nos permite mejorar la toma de decisiones ante un evento real, reduce el número de pruebas de verificación, reduciéndolo a un conjunto de pruebas válido de valores.

Ecuación aplicada a la vida y al trabajo

Las desigualdades nos ayudan a plantear y resolver diversos problemas matemáticos, geométricos, químicos y físicos, dándonos un conjunto de valores reales. Sin duda las desigualdades nos permiten resolver problemas no solo de matemáticas pues son de gran importancia en la resolución de problemas prácticos ya que se utilizan en diferentes campos, como la escala que nos permite medir fenómenos, como la intensidad del sonido, la escala del movimiento sísmico en Geología, y la acidez de algunos productos y en el desarrollo de proyectos científicos.

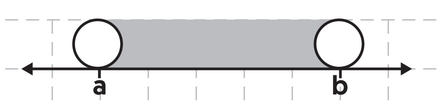
Propiedades de las desigualdades

PROPIEDAD	EJEMPLO
1. Si sumamos o restamos a cada miembro un mismo número, la desigualdad no cambia. a < b a + c < b + c //+c	5 < 7 5 + 2 < 7 + 2 //+2 **Se cumple la desigualdad** 7 < 9
2. Si multiplicamos o dividimos cada miembro por un número real positivo, la desigualdad no cambia. a > b //*c a * c > b * c	3 > 2 //*5 3 * 5 > 2 * 5 **Se cumple la desigualdad** 15 > 10
3. Si multiplicamos o dividimos cada miembro por un número real negativo, el signo de la desigualdad se invierte. a < b //*(-c) a*(−c) > b*(−c)	5 < 7 //*(-2) **La desigualdad se invierte** -12 > -14

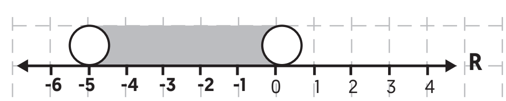
Clases de intervalos:

Intervalo abierto

a < x < b ;]a , b [

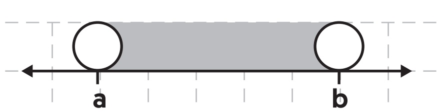


−5 < x < 0 ; =]−5,0[

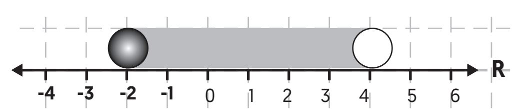


Intervalo semiabierto, semicerrado

a < x ≤ b ;]a , b]

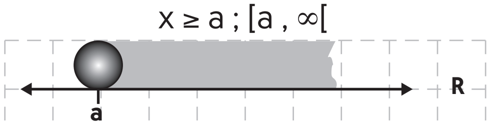


−2 ≤ x < 4 ; = [−2,4[

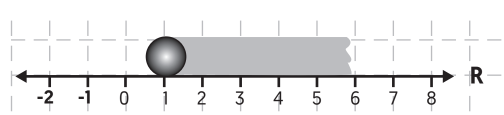


Intervalo al infinito

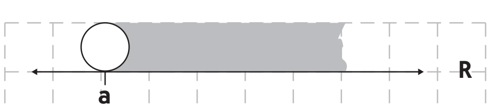
x ≥ a ; [a , ∞[



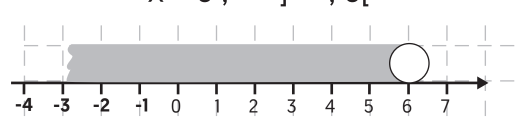
x ≥ 1 ;   = [1, ∞[



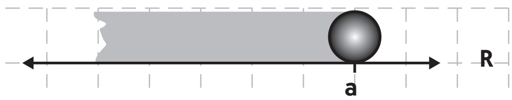
x > a ;]a , ∞[



x < 6 ;   =]−∞, 6[



$x \leq a$; $]-\infty, a]$



$x \leq 2$; $]-\infty, 2]$

$x < a$; $]-\infty, a[$

$x < 2$; $]-\infty, 2[$

Inecuaciones aplicada a la vida y al trabajo

a. Ejemplo

$$2(x+1)-3(x-2) < x+6$$

1. Iniciamos aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación.

2x+2-3x+6 < x+6

Es importante recordar que cuando multiplicamos dos términos debemos tomar en cuenta los signos de ambos términos.

2. Ordenamos los términos que contiene la incógnita y los términos independientes.

2x-3x-x < +6-6-2

Es importante recordar que cuando un término pasa al otro miembro su signo cambia.

3. Resolvemos la operación suma o diferencia.

-2x < -2

Es importante recordar que cuando multiplicamos dos términos debemos tomar en cuenta los signos de ambos términos.

4. Despejamos la incógnita y resolvemos la operación.

$$-x < -\frac{2}{2}$$

Al despejar la incógnita el valor que multiplica pasa al otro a dividir.

5. Multiplicamos ambos miembros por (-1) (el signo de la desigualdad se invierte).

x > 1

Analizamos el conjunto de valores que satisfacen la inecuación.

Interpretación la solución nos dice que x > 1, es decir que los valores que satisfacen a la inecuación son valores mayores a 1 y siguen hasta el infinito (1,∞).

Gráfica de la solución:

b. Ejemplo:

$$5x - 2x > 12 + 3$$

1. Transponemos términos $5x - 2x > 12 + 3$

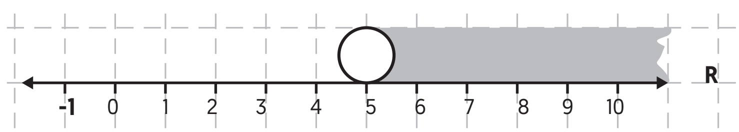
2. Reducimos términos semejantes $3x > 15$

3. Dividimos ambos miembros entre 3 $\frac{3x}{3} > \frac{15}{3}$

$$x > 5 =]5, \infty[$$

Analizando la desigualdad determinamos que el intervalo de la solución corresponde a valores mayores a 5 hasta el infinito.

Gráfica de la solución



c. Ejemplo

$$-1 - 5 \leq 5x - 5x - 3x < 8 - 5$$

1. Realizamos operaciones matemáticas

$$-6 \leq -3x < 3$$

2. Dividimos entre (-3) y cambia el sentido de la desigualdad

$$\frac{-6}{-3} \geq \frac{-3x}{-3} > \frac{3}{-3}$$

3. Analizamos la desigualdad y determinamos que podemos dividir en dos desigualdades para facilitar el gráfico.

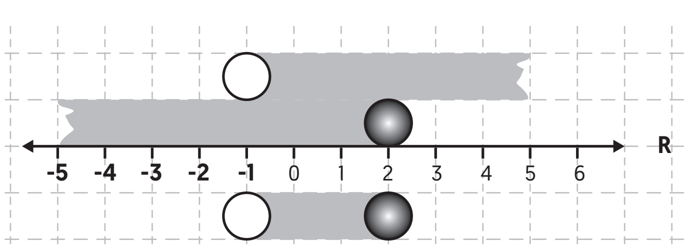
$$-2 \geq x > -1$$

4. Dividimos en dos desigualdades

$$x \leq 2 \wedge x > -1 \quad =]-1, 2]$$

Es importante notar que en la primera desigualdad se invierte, y esta comprende valores menores o igual a 2 hasta el menos infinito, la segunda desigualdad comprende valores de -1 hasta el infinito.

Gráfica de la solución



Con la ayuda de los gráficos de la primera y segunda desigualdad determinamos el conjunto de valores de la desigualdad.

Reflexionemos lo aprendido

En el cuaderno de prácticas resuelve y grafica los siguientes problemas de ecuación de primer grado y anota la respuesta en el recuadro de color.

1) $2-x=x-8$

R.-

2) $2x-1=5x+8$

R.-

3) $3+3x-1=x+2+2x$

R.-

4) $2(3x-2)=2$

R.-

5) $1-\frac{x}{3}=\frac{5x}{3}$

R.-

6) $1+\frac{1}{2}(4x-6)=-2$

R.-

7) $\frac{2x}{3}+\frac{16}{3}=-\frac{4x}{2}$

R.-

8) David y su esposa Elena ganan un total de 1.154 bolivianos, pero Elena gana Bs. 506 menos que su esposo David. **¿Cuánto gana David y cuánto gana su esposa Elena?**

R.-

9) Julia y su esposo llevan a vender verduras en la feria de Titicachi, su esposo vende maíz, llegando a su casa suman el dinero y cuentan 350 bolivianos. Dámaso, esposo de Julia, ganó Bs. 200 más que su esposa. **¿Cuánto ganó cada uno?**

R.-

En el cuaderno de prácticas resolvemos y graficamos los siguientes problemas de inecuaciones de primer grado y anota la respuesta en el recuadro de color.

1. $3+x>8$

R.-

2. $4+3x<13$

R.-

3) $-6x + 7 \geq -17$

R.-

4) $5(x + 1) - 8 \leq 3(x - 1)$

R.-

5.) $1 - \frac{x}{3} = \frac{5x}{3}$

R.-

6) $\frac{(3x + 4)}{2} < \frac{(4x - 5)}{3}$

R.-

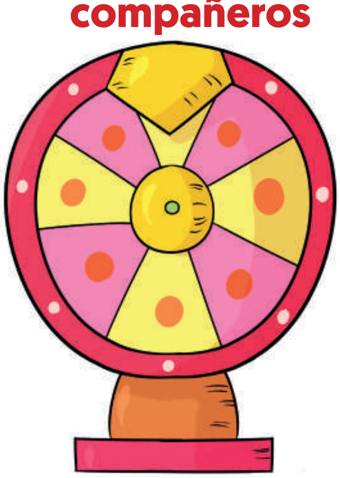
7) $\frac{x - 2}{4} + \frac{2(1 - 2)}{5} \geq -\frac{4 - (x + 3)}{3}$

R.-

8) $3 - 2 < 1$ -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	10) $\frac{(x+1)}{2} > 4$ -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
9) $-2 + 6 \leq -3$ -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	11) $3(-2) \leq 2 - 4$ -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Apliquemos lo aprendido

Juega con tus compañeros



Ruleta

Objetivo: fortalecer la práctica colectiva en la resolución de problemas de inecuaciones.

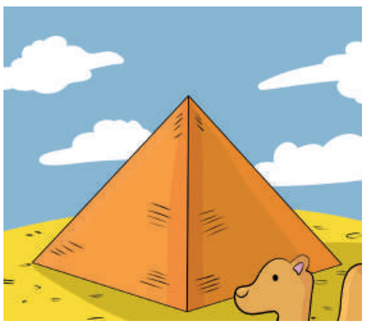
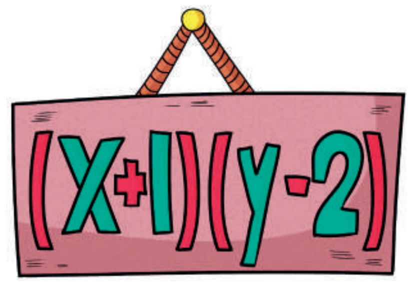
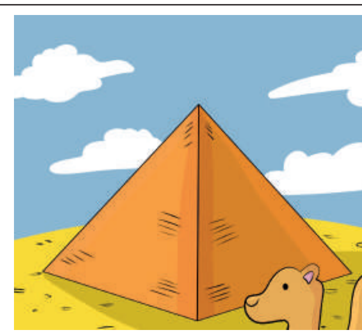
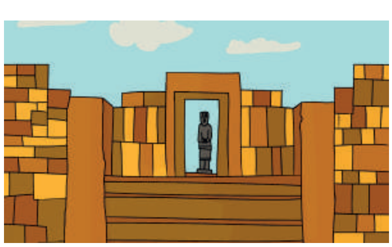
Con la ayuda del Facilitador construimos una ruleta, en cada uno de los colores el facilitador pegará un papel con un ejercicio propuesto de inecuaciones, por turnos los estudiantes giran la ruleta y resuelven el problema en el pizarrón.

Realiza un informe de cómo te ayudan las ecuaciones de primer grado para subsanar una necesidad o problema en tu trabajo o comunidad.

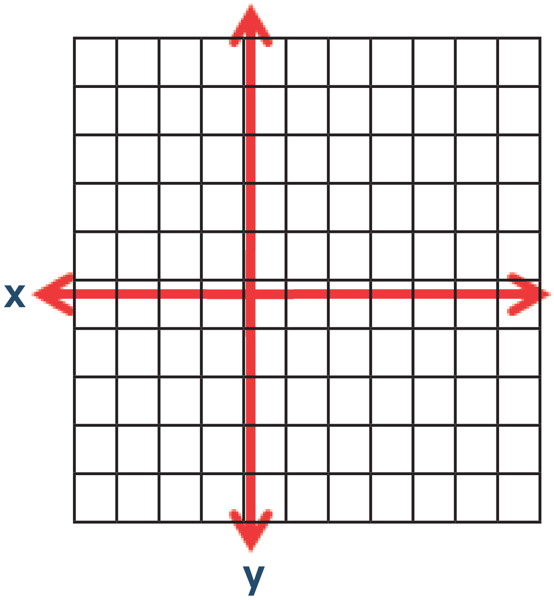
Unidad temática N.º 2:

Sistema de ecuaciones de primer grado con dos o más incógnitas

Unir con una línea aquellos gráficos y expresiones matemáticas que sean iguales:

Representamos en un eje de coordenadas cartesianas los siguientes pares ordenados, si cada par ordenado representa un punto en el sistema de coordenadas.



P = {(2, 5); (-1,3); (-3, -2); (4, -1); (5, 4)}

Representamos gráficamente las siguientes expresiones matemáticas, realiza los gráficos con el color que corresponde a cada expresión.

$$\mathbf{y = 2x + 5}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{y}{2} = \frac{3x}{5}$$

El triple de un número más otro número es igual a 5. (3x + y = 5)

El doble del primero menos 4 es igual al segundo. (2x – 4 = y)

Escribe un párrafo sobre lo que tenemos graficado en el eje de coordenadas cartesianas.

R.-

Exploremos la teoría

Sistema de ecuaciones con dos incógnitas

Observa cómo procedemos para traducir la siguiente frase al lenguaje algebraico:

El triple de un número más otro número es igual a 5.

$$3x + y = 5$$

Escogemos las letras con las que representaremos las incógnitas.	x para el primer número y para el segundo número
Escribimos en lenguaje algebraico la primera parte del enunciado.	El triple de un número: $3x$
Escribimos en lenguaje algebraico la segunda parte del enunciado.	Más otro número: y
Escribimos la ecuación correspondiente del enunciado completo.	$3x + y = 5$

Recuerda

La solución de una ecuación de primer grado será siempre la suma de sus variables, mientras que las soluciones de una ecuación de segundo grado serán siempre iguales a los valores de primer grado de sus correspondientes variables. Además, las soluciones de las ecuaciones de tercer grado también son llamadas ecuaciones cúbicas y se pueden resolver por medio de la REGLA DE RUFFINI.

Aprendamos juntos a resolver problemas de sistemas de ecuaciones :

PASOS	PROCEDIMIENTO	EJEMPLO Resolver 2(x+1) -3(x-2) = x-6
1	Quitar paréntesis	2(x+1) -3(x-2) = x-6 2x + 2 - 3x + 6 = x - 6
2	Quitar denominadores	No tiene denominadores
3	Agrupar los términos con x en un miembro y los términos independientes en otro	2x + 2 - 3x + 6 = x – 6 2x – 3x – x = – 6 – 2 – 6
4	Reducir los términos semejantes	2x – 3x – x = – 6 – 2 – 6 2x – 4x = – 14 – 2x = – 14
5	**Despejar la incógnita**	– 2x = – 14 $x = \frac{-14}{-2}$ x = 7

APRENDIZAJES COMPLEMENTARIOS - MATEMÁTICA

Para resolver ecuaciones con dos incógnitas (x, y) el procedimiento es muy similar, solo que en vez de hallar un valor (x) encontraremos 2 valores uno x y el otro y, además de que para cada valor que le demos a x habrá otro valor y; por lo tanto, las soluciones pueden ser infinitas, pero la representación gráfica de una ecuación de PRIMER GRADO siempre será una recta.

Realizamos la representación gráfica de la siguiente ecuación: $4x - 2y = 6$.

Si tenemos que la ecuación resultante: x = ... (completa la expresión).

X	Y

Expresa mediante una ecuación de primer grado con dos incógnitas cada una de las siguientes frases:

a) Hemos comprado un litro de leche y 10 panes, y hemos pagado Bs. 12.

b) Al comprar 6 botellas de agua y 5 panecillos nos han cobrado Bs. 7.

c) El perímetro de un rectángulo es 60 cm.

d) La edad de un padre es superior en 27 años a la de su hijo.

e) Halla tres soluciones para la siguiente ecuación y compruébalas.

$$3x - 2(y - 3) = 5$$

Solución 1	Solución 2	Solución 3

Como hemos podido ver más arriba hemos realizado en un solo Plano Cartesiano la representación gráfica de varias ecuaciones de Primer Grado, cuando se presentan dos o más ecuaciones en una sola representación se llama **sistema de ecuaciones de primer grado con dos o más incógnitas**. Y su solución será el punto en el cual se interceptan estas rectas, a estas se las llama **ecuaciones compatibles y determinadas**.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

en la ecuación A
x + y = 14

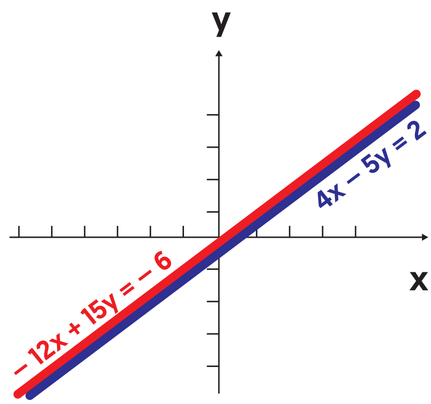
xy	
01	4
14	0

en la ecuación B
x + y = 4

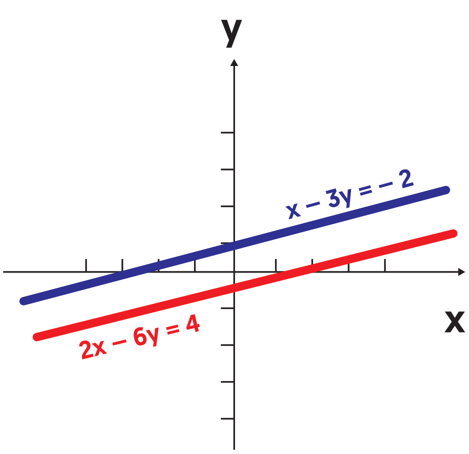
x	y
0	-4
4	0

La solución del sistema, la intersección de las dos rectas es el punto P (9,5)

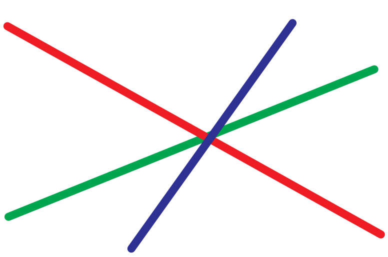
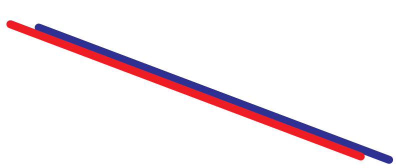
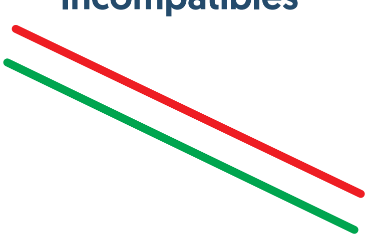
Hay sistemas donde las rectas son paralelas y están sobrepuestas una sobre la otra, estos sistemas de ecuaciones de Primer Grado con dos o más incógnitas se las denominan **ecuaciones compatibles e indeterminadas** porque tienen infinitas soluciones.



Aunque también hay casos en los que las rectas son paralelas y por lo tanto no tiene un punto de intersección estas ecuaciones de Primer Grado con 2 o más incógnitas son ecuaciones incompatibles.



Por lo tanto, podemos deducir que en un sistema de dos ecuaciones con dos o más variables podemos encontrar tres tipos de resultados y por lo tanto son tres formas diferentes en las que se pueden presentar las mismas.

Compatibles y Determinadas	Compatibles e Indeterminados	Ecuaciones Incompatibles
		
El resultado será un solo punto de intercepción de las ecuaciones.	El resultado será infinitos puntos de intercepción, porque una ecuación esta sobrepuesta en la/s otra/s ecuaciones.	Normalmente estas ecuaciones son paralelas entre sí, por lo tanto, nunca tendrán un punto de intercepción.

Veamos el siguiente problema:

Las edades de dos hermanos suman 25, y el doble de uno de ellos es 14. **¿Qué edades son?**
El enunciado lo escribimos en una expresión matemática:
x = primer hermano
y = segundo hermano
Los dos hermanos suman 25:

$$x + y = 25$$

el doble de uno de los hermanos es 14:

$$2x = 14$$

Así tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y = 25 & (1) \\ 2x = 14 & (2) \end{cases}$$

Resolvemos la expresión más sencilla posible, en este caso la ecuación (2)

$$2x = 14 \dashrightarrow x \frac{14}{2} \dashrightarrow x = 7 \quad (3)$$

Reemplazamos el valor hallado para x = 7, la igualdad (3) en la ecuación (1)

$$x + y = 25 \quad (1)$$

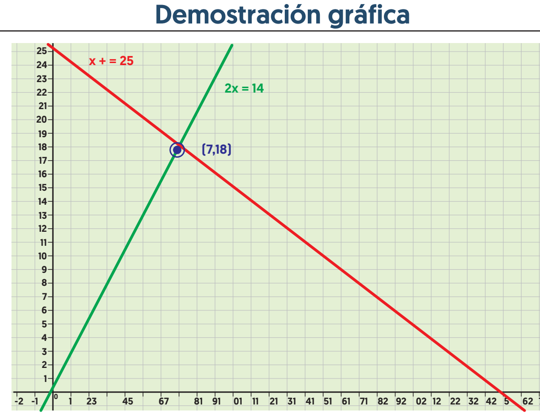
Despejamos y:

$$7 + y = 25$$
$$y = 25 - 7$$
$$y = 18 \quad (4)$$

Por lo tanto, los valores hallados para las incógnitas x, y tenemos que:

x = 7 Es la edad del primer hermano
y = 18 Es la edad del segundo hermano

Tenemos el punto coordenado (x, y) = (7, 18)
Para comprobar podemos reemplazar estos valores en cualquiera de las ecuaciones propuestas y el resultado debe darnos siempre una igualdad.
Reemplazando x; y, tenemos:

Demostración algebraica	Demostración gráfica
$x + y = 25$ $7 + 18 = 25$ $25 = 25$ $2x = 14$ $2(7) = 14$ $14 = 14$	

En un parqueo hay 55 vehículos entre coches y motos. Si el total de ruedas es de 170. ¿Cuántos coches y cuántas motos hay?

Diremos que: Los coches son x — Si cada coche tiene 4 ruedas, entonces diremos que: 4x

Las motos son y — Si cada moto tiene 2 ruedas, entonces representamos: 2y

Lo planteamos en lenguaje algebraico:

Debemos tener cuidado de no mezclar la cantidad de vehículos con la cantidad de ruedas, ahora lo escribimos de manera algebraica.

$$\begin{cases} x + y = 55 \\ 4x + 2y = 170 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones, para ello despejamos una de las incógnitas en la ecuación más sencilla.

Resolvemos el sistema de ecuaciones	$x + y = 55$ (1) $4x + 2y = 170$ (2)	
Despejamos x en 1ª Ecuación:	$x = 55 – y$ (3)	
Sustituimos (3) en la 2ª Ecuación (2):	$4x + 2y = 170$ (2) $4 (55 – y) + 2y = 170$	
Resolvemos la Ecuación:	$4 (55 – y) + 2y = 170$ $220 – 4y + 2y = 170$ $– 4y + 2y = 170 – 220$ $– 2y = – 50$ $y - – 50$ $– 2$ $y = 25$	
Sustituimos y = 25 en (1) para calcular x:	$x + y = 55$ (1) $x + 25 = 55$ $x = 55 – 25$ $x = 30$	
Solución:	Coches x: 30 Motos y: 25	
Comprobación:	30 coches +25 motos 55 vehículos	30 coches *4 ruedas =120 ruedas + 25 motos * 2 ruedas =50 ruedas = 170 ruedas

Resolvamos los siguientes problemas propuestos

En el terreno de don Jacinto, calcular el ancho de la superficie del terreno, sabiendo que uno de los lados es de 120 m y se tiene 600 m de alambre de púas para todo el perímetro.

600 m = 120 m + 120 m + X + X

600 m = 240 m + 2X

600 m – 240 m = 2X

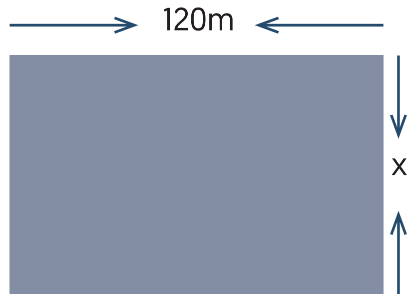
360 m = 2X

360 m

--------- = X

2

180 m = X



Resuelve:

1. Dos kilos de plátanos y tres de peras cuestan 7,80 Bs. Cinco kilos de plátanos y cuatro de peras cuestan 13,20 Bs. ¿A cómo está el kilo de plátanos y el de peras?

2. María tiene en su corral gallinas y patos. En total hay 14 cabezas y 38 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos patos hay en el corral?

3. Un panadero gana 0,3 Bs por cada pan que sale del horno, pero pierde 0,4 Bs por cada uno que sale defectuoso y/o quemado. Un día en el que fabricó 2100 panes obtuvo un beneficio de 484,4 Bs. ¿Cuántos panes buenos y cuántas defectuosas y/o quemados elaboró ese día?

Resolvamos los siguientes problemas propuestos

a) $\begin{cases} 2x + y - z = -6 \\ 3x - y + z = -5 \\ 4x + 2y - 2z = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ 4x - 2y + 6z = -5 \\ -2x + y - 3z = -7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ x + 2y + z = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x - y + 3z = -5 \\ 3x + 2z = -7 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y + z = 8 \\ 7x + y + 6z = 7 \\ x + 7y + z = 1 \end{cases}$

Métodos de solución de sistemas de ecuaciones con dos o más incógnitas

<table>
<tr><th colspan="4">Métodos para solucionar sistemas de ecuaciones de primer grado</th></tr>
<tr><th>Sustitución</th><th>Igualación</th><th>Reducción</th><th>Gráfico</th></tr>
<tr>
<td>$\begin{cases} -10x - 5y = 0 \\ 21x - 7y = 28 \end{cases}$

Despejamos una incógnita
$-10x - 5y = 0$
$-5y = 10x$
$y = 10x/(-5)$
$y = -2x$

Sustituimos el valor encontrado en la otra ecuación y resolvemos
$21x - 7y = 28$
$21x-7(-2x)=28$
$21x + 14x = 28$
$35x = 28$
$x=28/35$
$x=4/5 = 0,8$

Hallamos el valor de la otra incógnita
$y = -2x$
$y=-2(4/5)$
$y = -8/5 = -1,6$

Por lo tanto, el valor de las incógnitas es:</td>
<td>$\begin{cases} -10x - 5y = 0 \\ 21x - 7y = 28 \end{cases}$

Despejamos la misma incógnita en ambas ecuaciones.
$-10x - 5y = 0$
$-5y = 10x$
$y=10x/(-5)$
$y = -2x$
$21x - 7y = 28$ /-1
$7y = -28 + 21x$
$y=(-28+21x)/7$

$y=-28/7+21x/7$
$y = -4 + 3x$
$y = 3x - 4$

Igualamos las expresiones halladas y resolvemos.
$y = y$
$-2x = 3x - 4$
$-3x -2x = -4$
$-5x = -4$
$x=4/5$

Reemplazamos el valor de la incógnita encontrada en una de las ecuaciones (la ecuación más sencilla)
$-10x - 5y = 0$
$-10(4/5)-5y=0$
$-40/5-5y=0$
$-8 = 5y \Longrightarrow 5y = -8$
$y= -8/5$

Por lo tanto, la solución del sistema será:
$x=4/5 = 0,8$
$y= -8/5 = -1,6$</td>
<td>$\begin{cases} -10x - 5y = 0 \\ 21x - 7y = 28 \end{cases}$

Multiplicamos el coeficiente más simple de la misma incógnita que haya en las dos ecuaciones. (esto para evitar operaciones largas y/o complejas)

$-10x - 5y = 0$ //7
$21x - 7y = 28$ //-5

Ahora multiplicamos por los coeficientes que tienen las incógnitas restantes y luego las sumamos.
$-70x - 35y = 0$
$-105x + 35y = -140$
$-175x \quad 0 \quad = -140$
$-170x = -140$

Despejamos la incógnita que tenemos,
$x = (-140)/(-170)$

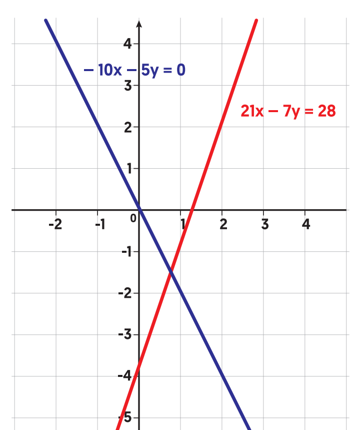
$x = (14)/17 \Longrightarrow$
$x = 0,8$

Reemplazamos el valor de la incógnita hallada en la primera ecuación.
$-10x - 5y = 0$
$-10(0,8) - 5y = 0$
$-8 - 5y = 0$
$-5y = 8$
$y = 8/(-5)$
$y= -8/5$
$y= -1.6$</td>
<td>$\begin{cases} -10x - 5y = 0 \\ 21x - 7y = 28 \end{cases}$

Igualamos a un mismo número cada una de las incógnitas para realizar la gráfica de cada ecuación.

Para: $-10x - 5y = 0$
Cuando $x = 1$:
$-10(1) = 5y$
$-10 = 5y$
$y=-10/5$
$y = -2$

Cuando $y = 1$:
$-10x - 5y = 0$
$-10x = 5(1)$
$-10x = 5$
$x=-5/10$
$x=-1/5$
$x = 0,2$
Entonces tendremos:
$-10x - 5y = 0$
<table><tr><th>X</th><th>Y</th></tr><tr><td>1</td><td>-2</td></tr><tr><td>0,2</td><td>1</td></tr></table>
Para: $21x - 7y = 28$
Cuando $x= 1$:
$21(1) - 7y = 28$
$21 - 7y = 28$ /-1
$7y = -28 - 21$
$y= -49/7$
$y = 7$

Cuando $y = 1$:
$21x - 7y = 28$
$21x - 7(1) = 28$
$21x = 28 + 7$
$21x = 35$
$x=35/21$
$x=5/3$
$x = 1,7$
entonces tendremos:
$21x - 7y = 28$
<table><tr><th>X</th><th>Y</th></tr><tr><td>1</td><td>1,7</td></tr><tr><td>1,7</td><td>1</td></tr></table>
Representamos gráficamente cada una de las ecuaciones:

</td>
</tr>
</table>

Reflexionemos lo aprendido

Resuelve el siguiente problema aplicando una de las formas de resolución de ecuaciones de primer grado.

Juana tiene su puesto en el mercado donde tiene: Seis camisetas y cinco gorras cuestan Bs. 227; Cinco camisetas y 4 gorras cuestan Bs. 188. Halla el precio de una camiseta y de una gorra.

- Recuerda que primero debes ponerlo en lenguaje algebraico.
- Luego elegir un método de resolución (el que mejor domines).
- Hallar el valor para cada variable. (camisetas y gorras).

(Solución: Bs. 32 camisetas, Bs. 7 gorras) Compara con el resultado que encontraste.

En este recuadro escribe la importancia y el valor que tiene saber resolver ecuaciones de primer grado para resolver problemas de la vida diaria:

R.- ....
....
....
....
....
....
....
....

Desarrollamos las siguientes actividades:

1. Expresa mediante una ecuación de primer grado con dos incógnitas cada una de las siguientes frases:

   a) Hemos comprado una libreta y un bolígrafo, y hemos pagado 8 Bs.

   b) Al comprar 6 botellas de agua y 5 panecillos nos han cobrado 7 Bs.

   c) El perímetro de un rectángulo es 60 cm.

   d) La edad de un padre es superior en 27 años a la de su hijo.

2. El perímetro de un rectángulo es 64cm y la diferencia entre las medidas de la base y la altura es 6cm. Calcula las dimensiones de dicho rectángulo.

3. La edad de Manuel es el doble de la edad de su hija Ana. Hace diez años, la suma de las edades de ambos era igual a la edad actual de Manuel. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

4. José dice a Eva: “Mi colección de VIDEO-MUSICALES es mejor que la tuya ya que si te doy 10 tendríamos la misma cantidad”. Eva le responde: “Reconozco que tienes razón. Solo te faltan 10 VIDEO-MUSICALES para doblarme en número”. ¿Cuántos discos tiene cada uno?

5. Un mayorista quiere dar un bono entre sus empleados de su taller de costura. Pero se da cuenta de que si da a cada uno Bs. 80, le sobran Bs. 20 y si da a cada uno Bs. 90 le faltan Bs.40. ¿Cuántos empleados tiene en su taller de costura?, ¿Cuánto dinero tiene para repartir?

6. Seis camisetas y cinco gorras cuestan Bs. 227. Cinco camisetas y 4 gorras cuestan Bs. 188. Halla el precio de una camiseta y de una gorra.

   (Solución: 32 camisetas, 7 gorras)

7. Javier dispone de un capital de Bs. 8000, del que una parte la pone en un depósito al 5% anual y otra parte al 6% anual. Calcula ambas partes sabiendo que el capital acumulado al cabo de un año es de Bs. 8450.

   (Solución: Capital al 5% = Bs. 3000 y capital al 6% = Bs. 5000)

8. Un taller que fabrica poleras, recibe un encargo para un día determinado. Al planificar la producción se dan cuenta de que, si fabrican 250 poleras al día, faltarían 150 al concluir el plazo que tienen. Y si fabrican 260 poleras diarios entonces les sobrarían 80. ¿Cuántos días tienen de plazo y cuántas poleras les encargaron?

   (Solución: 23 días de plazo y 5900 poleras)

Vamos a la producción

Cada participante elaborará en un papelógrafo un esquema con los pasos de resolución de cada uno de los métodos para resolver ecuaciones de primer grado con dos o más incógnitas que conozca. Posteriormente, en el aula, presentará y explicará el trabajo realizado.

Unidad temática N.º 3:

Ecuaciones e inecuaciones de segundo grado

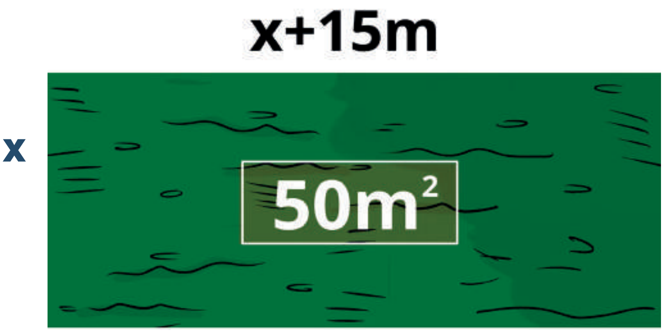
Leamos con atención y respondamos:

En el Centro de Educación Alternativa tienen la carrera técnica de Agropecuaria en la que tienen una huerta educativa en la cual se tiene un terreno agrario. En este tema aprenderemos a calcular medidas exactas de terrenos o superficies no regulares.

Juan Pinto del curso de aprendizajes Complementarios quiere saber el largo y el ancho de la de su terreno agrario. Sabiendo que tiene una superficie de 50 m^2 pero no tiene otro tipo de medidas pero al ver su terreno agrario se da cuenta que tiene 15 metros más en un lado.

Calcular el largo y ancho de la platabanda para saber cuántos plantines de manzana deben plantar.

Gráfico del terreno



¿Cuál sería el planteamiento del problema, qué fórmula podríamos utilizar?

¿Cuántos plantines de manzana entrarán en el espacio encontrado a lo largo y ancho de la platabanda?

Intenta resolver en este espacio

Graficar y dibujar en este espacio

Exploremos la teoría

Ecuaciones de segundo grado

Una ecuación de segundo grado es una **ecuación polinómica cuyo grado es 2,** es decir, aquella en la que el grado mayor de los monomios es 2 (es decir, su parte literal es x al cuadrado x^2). Los números a, b y c son los coeficientes de la ecuación, siendo siempre distinto de 0 (si no, no sería una ecuación de segundo grado).

$$ax^2 + bx + c = 0$$

La ecuación de segundo grado también denominada ecuación cuadrática, es **una fórmula matemática igualada a cero y que depende de una variable.**

Para mayor entendimiento explicamos que una ecuación de segundo grado tiene las siguientes características:

Ecuación cuadrática de la forma $(ax^2 + bx + c = 0)$

Es un polinomio cuadrático	ax^2 (que tiene grado 2)
Se compone de tres términos sumados algebraicamente	$ax^2 + bx + c$
Se representa igualando la suma algebraica de los términos a cero	$ax^2 + bx + c = 0$
Cada término o variable se presenta con signo valor numérico representado con las letras (a, b y c)	$(a)\ x^2 + (b)\ x + (c) = 0$
El coeficiente del término cuadrático nunca puede ser igual a cero	$(a) \neq 0$

Métodos de resolución

Para poder realizar operaciones de ecuaciones de segundo grado o cuadráticas completas de la forma $(a)x^2 + (b)\ x + (c) = 0$ se puede utilizar las siguientes formas de resolución.

- Por factorización
- Por fórmula general
- Gráfico

En esta unidad temática veremos estos tres métodos y comprenderemos a cabalidad como resolver ecuaciones cuadráticas completas e incompletas.

a) Por factorización

Recordamos los pasos para resolver factorización por el método ASPA que nos ayudará a resolver las ecuaciones cuadráticas por el método de factorización.

Recordemos

Procedimiento para factorizar un trinomio por el método del ASPA simple.

Para aplicar el método de ASPA simple, seguimos los siguientes pasos.

N°	PASO	EJEMPLO
1	Ordenar el trinomio de la forma decreciente en la forma $(a)x^2 + (b)x + (c) = 0$	$x^2 + 8 = 6x$ $x^2 - 6x + 8 = 0$
2	Descomponer en factores convenientes los términos extremos del polinomio (descomponer los extremos).	$x^2 - 6x + 8 = 0$ $x \quad -4$ $x \quad -2$ Nota: los signos salen de la aplicación de ley de signos
3	Multiplicar de forma cruzada los factores descompuestos y comprobar que el termino central sea igual a la suma de los productos parciales aplicando siempre la ley de signos.	$x^2 - 6x + 8 = 0$ $x \quad -4 \rightarrow x(-4) = -4x$ $x \quad -2 \rightarrow x(-2) = \underline{-2x}$ $-6x$ NOTA: En este caso observamos que el término central es – 6x y al aplicar aspa y ley de signos aplica correctamente la operación. Si esto no pasara, debes cambiar los factores descompuestos o cambiara sus signos.
4	Agrupar los términos en forma horizontal y escribir el trinomio como producto para verificar que está correcto.	$x^2 - 6x + 8 = (x - 4)(x - 2)$ $(x - 4)(x) + (x - 4)(-2)$ $x^2 - 4x - 2x + 8$ $x^2 - 6x + 8$ Nuestra factorizacíon es correcta

Aprendamos juntos a resolver problemas de ecuaciones de segundo grado:

De acuerdo al cuadro anterior resolvamos y apliquemos en estos ejemplos:

Ejemplo 1

$x^2 - 4x + 3 = 0$

x	- 1	x (-1) = - 1x
x	- 3	x (-3) = - 3x
		- 4x

Respuestas:	
(x - 1) = 0 X – 1 = 0 X = 1	(x- 3) = 0 X – 3 = 0 X = 3

Aplica la regla general de factorización método ASPA.

Prueba:

$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$

$(x - 1)(x) + (x - 1)(-3)$

$x^2 - x - 3x + 3$

$x^2 - 4x + 3$

Cumple con la verificación, eso quiere decir que la factorización fue correcta.

Ejemplo 2:

Realizamos una operación más compleja como demostración

$5x(x - 1) - 2(2x^2 - 7x) = -8$

Resolvemos aplicando lo aprendido en operaciones de 1er grado:

$5x(x - 1) - 2(2x^2 - 7x) = -8$

$5x^2 - 5x - 4x^2 + 14x + 8 = 0$

$x^2 + 9x + 8 = 0$

x	8	x (8) = 8x
x	1	x (1) = 1x
		9x

Respuestas:	
(x + 8) = 0 X + 8 = 0 X = - 8	X + 1 = 0 (x + 1) = 0 X = - 1

Aplica la regla general de factorización método ASPA.

Prueba:

$x^2 + 9x + 8 = (x + 8)(x + 1)$

$(x + 8)(x) + (x + 8)(+1)$

$x^2 + 8x + x + 8$

$x^2 + 9x + 8$

Cumple con la verificación, eso quiere decir que la factorización fue correcta.

b) Por fórmula general

Para poder hallar las soluciones de los problemas de ecuaciones cuadráticas se puede utilizar la formula general que demostramos a continuación.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nota importante: la formula general nos ayuda a resolver ecuaciones cuadráticas completas de la forma:

$$(ax^2 + bx + c = 0)$$

Donde los tres términos del polinomio se clasifican por letras:

- El término del x^2 se clasifica con la letra **(a)**
- El término de la x se clasifica con la letra **(b)**
- Y el término independiente (el número) se clasifica con la letra **(c)**

Se debe tomar en cuenta que cada término se designa con una letra, pero esa letra se considera el valor numérico de su término o sea el signo y número que tiene. Ahora lo aplicamos en operaciones cuadráticas.

Ejemplo:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Identificar las constantes e identificamos con las letras correspondientes.

Datos

a = 1
b = - 4
c = 3

$$x = \frac{b^{+}- \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

En la fórmula general intercambiamos la parte numeral de las constantes.

$$x = \frac{(-4)^{+}- \sqrt{(-4)^2-4.1.3}}{(2.1)}$$

Aplicamos ley de signos y realizamos operaciones aritméticas.

$$x = \frac{4^{+}- \sqrt{16 - 12}}{2}$$

Realizamos las operaciones obteniendo dos respuestas uno con el signo positivo el segundo con signo negativo.

$$x = \frac{(4^{+}-\sqrt{4})}{2}$$

$$x = \frac{(4^{+}-2)}{2}$$

$$x_1 = \frac{4 + 2}{2} \qquad x_1 = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{4 - 2}{2} \qquad x_2 = \frac{6}{2} = 1$$

VERIFICACIÓN

La operación de ecuaciones de segundo grado o cuadráticas se puede realizar la verificación mediante la sustitución de los valores encontrados reemplazando dichos valores en la ecuación original.

VERIFICACIÓN CON $X_1 = 3$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$(3)^2 - 4(3) + 3 = 0$

$9 - 12 + 3 = 0$

$+12 - 12 = 0$

$0 = 0$

VERIFICACIÓN CON $X_2 = 1$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$(1)^2 - 4(1) + 3 = 0$

$1 - 4 + 3 = 0$

$+4 - 4 = 0$

$0 = 0$

c) Método gráfico

Al representar en el plano cartesiano la ecuación de segundo grado, se obtiene el gráfico de una parábola. Se constituye una tabla de valores para x y para y, y se debe representar los puntos obtenidos en el plano cartesiano.

Ejemplo:

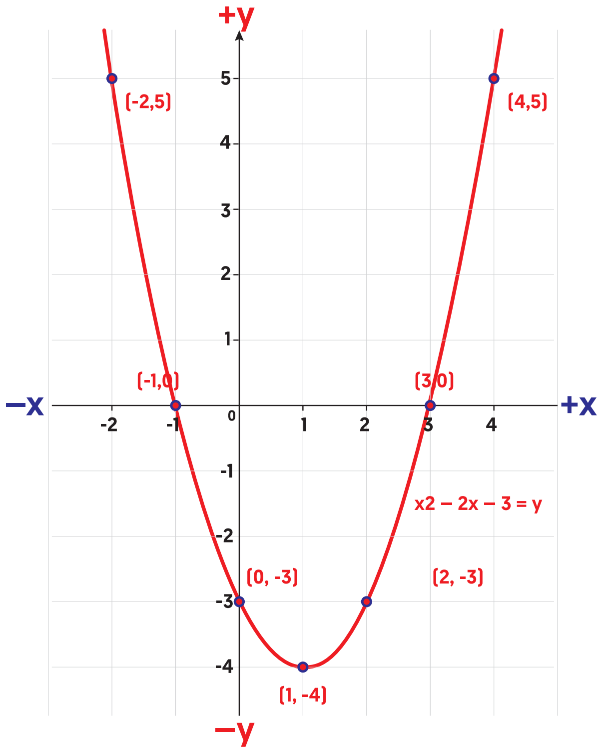
Graficar: $x^2 - 2x - 3 = 0$

Datos

a = 1
b = - 2
c = - 3

$y = x^2 \; - \; 2x \; - 3$	
$y = (0)^2 - 2(0) - 3$ →	$y = -3$
$y = (1)^2 - 2(1) - 3$ →	$y = -4$
$y = (2)^2 - 2(2) - 3$ →	$y = -3$
$y = (3)^2 - 2(3) - 3$ →	$y = 0$
$y = (4)^2 - 2(4) - 3$ →	$y = 5$
$y = (-1)^2 - 2(-1) - 3$ →	$y = 0$
$y = (-2)^2 - 2(-2) - 3$ →	$y = 5$

x	Y
0	-3
1	-4
2	-3
3	0
4	5
-1	0
-2	5



d) Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas

1. **Caso: a x 2 = 0**

   La solución es x = 0.

Ejemplos:

$$2x^2 \quad - \quad 0 \qquad x = 0$$

$$\frac{2}{5}x^2 \quad - \quad 0 \qquad x = 0$$

2. **Caso: x 2 + bx = 0**

Extraemos factor común x:

$$x\,(ax + b) = 0$$

Como tenemos un producto igualado a cero o un factor es cero o el otro factor es cero o los dos son cero.

$$x = 0$$

$$ax + b = 0 \qquad x = \frac{-b}{a}$$

Ejemplos:

1. $2x^2 - 5x - 0$

$x(x - 5) = 0$ Sol. $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

$x = 0$

$x - 5 = 0$

$x = 5$

2. $2x^2 - 6x - 0$

$2x(x - 3) = 0$ Sol. $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

$2x = 0$

$x - 3 = 0$

3. Caso: a x 2 + c = 0

1. En primer lugar pasamos el término c al segundo miembro cambiado de signo.

2. Pasamos el coeficiente a al 2º miembro, dividiendo.

3. Se efectúa la raíz cuadrada en los dos miembros.

$$ax^2 = -c \quad x^2 - \frac{-c}{a} \quad x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}} \quad \begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{-c}{a}} \\ x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}} \end{cases}$$

Ejemplos:

1.

$$x^2 - 25 = 0$$

$$x^2 = 25 \quad x = \pm\sqrt{25} \quad \begin{cases} x_1 = \sqrt{25} = +5 \\ x_2 = -\sqrt{25} = -5 \end{cases}$$

Reflexionemos:

En el siguiente cuadro, con tu compañero/a de curso escribe una opinión sobre la importancia

R.- ....

Resolvemos los siguientes ejercicios:

Resolver los siguientes ejercicios de ecuaciones de segundo grado por el método de factorización como se explicó en esta unidad temática.

1) $x^2 - 5x + 4 = 0$ R = 4,1

2) $x^2 - 4x + 3 = 0$ R = 1,3

3) $x^2 - 2x + 3 = 0$ R = -1,3

4) $x^2 - x - 12 = 0$ R = -4,3

5) $(x -2)(x +2) – 7(x -1) = 21$ R= 9,-2

6) $2x^2 -(x - 2)(x +5)= 7(x +3)$ R=11,-1

Resolver los siguientes ejercicios de ecuaciones de segundo grado por el método de factorización como se explicó en esta unidad temática.

1) $x^2 + 5x + 4 = 0$ R = -4,-1

2) $x^2 - 2x - 8 = 0$ R = 4,-2

3) $x^2 + 7x + 12 = 0$ R = -3,-4

4) $x^2 - 5x + 4 = 0$ R = - 1,10

5) $x^2 - 4x = - 4$ R = 2,2

6) $2x^2 -(x - 2)(x +5)= 7(x +3)$ R=11,-1

Graficar las siguientes ecuaciones:

1) $x^2 - 5x + 6 = 0$ R = 3,2 2) $x^2 - 2x - 8 = 0$ R = 4,-2

3) $x^2 + 7x - 10 = 0$ R = 5,2 4) $x^2 + 5x + 4 = 0$ R = -4,-1

Inecuaciones de segundo grado

Observa el siguiente ejercicio, luego realiza dos ejemplos recordando lo aprendido en el tema 1 de ecuaciones e inecuaciones.

Realizaló en tu cuaderno y presentalo en la pizarra.

4X2 – 16 ≤ 0

4(X2 – 4) = 0

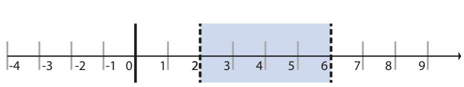
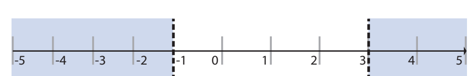
4{(X + 2) (X – 2)} = 0

X1 + 2 = 0 ; X2 – 2 = 0

X1 = - 2 ; X2 = 2

Después de dialogar sobre el ejercicio anterior el/la facilitador/a aclarará posibles dudas de los y las participantes a partir del siguiente cuadro.

x2 – 8x + 12 ≤ 0 **-x2+x–5 > -2x–3**

todo está en el primer miembro $x^2 - 8x + 12 \leq 0$	**Trasladar todas las expresiones al primer miembro**	$-x^2 + 4x > 2x - 3$ $-x^2 + 4x - 2x + 3 > 0$ $-x^2 + 2x + 3 > 0$
x -6 x -2 **Utilizamos método de ASPAS** tenemos (x - 6)(x - 2) ≤ 0	**Factorizar por el método ASPAS**	+ x -3 = + 3 x - x -1 = - x **Utilizamos método de ASPAS** Tenemos (x-3) (-x -1) >0
(x-6)(x-2) ≤0 x - 6 = 0; x - 2 = 0 x = 6 x = 2	**Igualar**	(x - 3) (- x - 1) > 0 / (x - 3)(- x - 1) < 0 x - 3 = 0; - x - 1 = 0 /*-1 x = 3 ; x = -1 cambia el signoz>,<
	**Graficar**	
(2,6)	**Puntos críticos**	(-∞, -1) ; (3,+ ∞)

En el cuaderno resolvemos los siguientes problemas de inecuaciones de segundo grado.

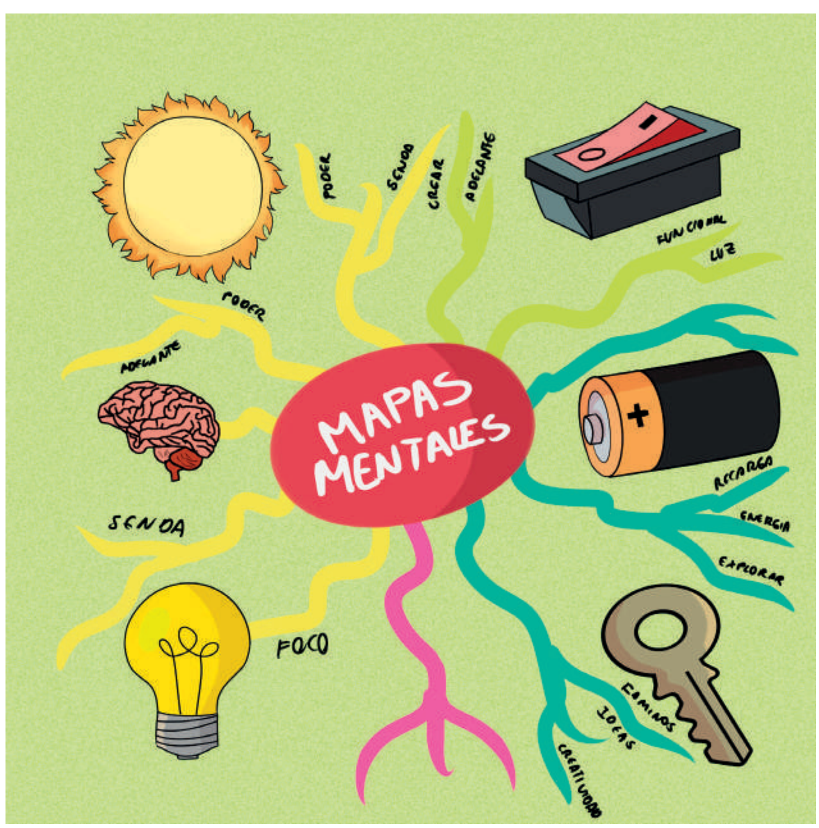
1. $(x^2-9)/(x-1) \leq 0$
2. $(x^2+x-9)/x>1$ Sol: (-3, 0) U (3, ∞)
3. 2x2 + x – 6 > 0 Sol: (- ∞, - 2] U [3/2, ∞)

Leamos atentamente y reflexionemos:

Como podemos apreciar, en la resolución de inecuaciones de segundo grado se aplican todos nuestros saberes y conocimientos de los temas anteriores, por lo tanto por parejas de participantes de manera dialogada escribir en una plana de una hoja tamaño carta sobre la importancia de saber resolver inecuaciones cuadráticas y cómo esto nos ayuda en nuestro trabajo diario.

Elaboremos un mapa mental:

1. Cada participante elabora un mapa mental del tema de ecuaciones e inecuaciones de segundo grado en su cuaderno.
2. El/la facilitador/a, en la siguiente clase organizará grupos de tres personas, quienes a partir de sus mapas mentales elaborarán un solo mapa mental integrando todo lo que cada participante ha elaborado y presentado al/a facilitador/a.



Módulo 2:

Logaritmos, progresiones y lógica

Objetivo holístico del módulo

Fortalecemos los principios, valores socio comunitarios y la espiritualidad desarrollando el pensamiento crítico, reflexivo, descolonizador, transformador en diálogo y consenso, a partir de las cosmovisiones, filosofías y literaturas propias y diversas para Vivir Bien en comunidad, con la Madre Tierra y el Cosmos.

Unidad temática N.º 1:

Logarítmo

El matemático escocés John Napier descubrió el logaritmo en el siglo XVII. La idea de Napier surgió al buscar una operación inversa para la potenciación, similar a cómo la resta es la inversa de la suma y la división es la inversa de la multiplicación. Se planteó la pregunta de si la potenciación debía tener su propia operación inversa.

Leamos con atención y respondamos

¿Por qué en la imagen Nº 1 como igualdad esta 32 y en la imagen Nº 2 cuál sería su igualdad?

....

....

....

¿Qué nombre le pondremos a la imagen Nº 2 y por qué?

....

....

....

....

¿Qué relación tendrá la imagen con el tema de logaritmos?

....

....

....

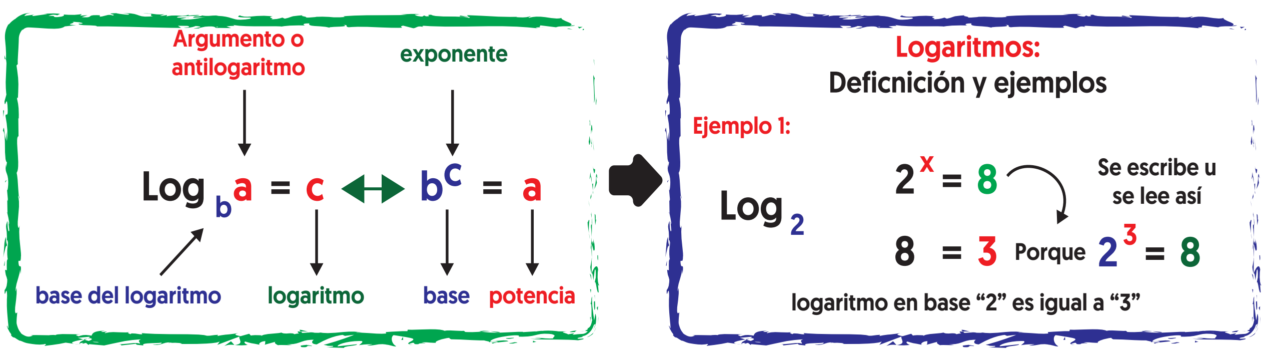
....

Exploremos la teoría

Definición de logaritmos

El logaritmo en base “b” de un número “a” se representa por $\log_b(a)$ y es el número “c” que cumple $b^c = a$:

Nota importante: la base debe ser un número real positivo distinto de 1. El número a recibe el nombre de argumento del logaritmo.



¿Cómo se lee un logaritmo?

Logaritmación es el proceso de hallar el exponente al cual fue elevada la base para obtener un número. que se lee como: logaritmo en base b de a es igual a c si y solo si b elevado a la c da por resultado a. Así, en la expresión $10^2 = 100$, el logaritmo en base 10 de 100 es 2, y se escribe como $\log_{10} 100 = 2$.

A continuación, te damos algunos ejemplos sobre la aplicación de la definición de logaritmos.

1. $\log_2 8=3$ porque $2^3=8$
2. $\log_{\frac{1}{3}} 243=x$; porque $\left(\frac{1}{3}\right)^x=243$
3. $\log_6 36=2$; porque ....
4. $\log_5 125=$..

Te invitamos a dirigirte al momento de la producción y desarrollar la actividad N.° 1

Si no recuerdas las propiedades de potenciación, será difícil aprender logaritmos

Muy importante recordar las propiedades de potenciación			
$a^0 = 1$	$a^1 = a$	$a^m \cdot a^n = {}^{m+n}$	$a^m \div a^n = a^{m-n}$
$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$	$(a^m)^n = {}^{m \cdot n}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$a^n \div b^n = (a \div b)^n$
$a^n - a^m$ Si entonces $m = n$			

Te invitamos a dirigirte al momento de la producción y desarrollar la actividad N.° 1

Sistema de logaritmos

Un sistema de logaritmo está determinado por la base del logaritmo, estos pueden ser infinitos ya que la base puede ser un numero positivo y distinto de la unidad (1).

Es importante indicar que los sistemas más utilizados y pueden ser resueltos utilizando la calculadora son dos:

a) El sistema de logaritmos decimal o de Briggs, cuya base es 10 (b = 10), donde la base 10 es sobreentendida.

$$\log_{10} x = \log x$$

b) El sistema de logaritmos decimal o neperiano, cuya base es el número e = 2, 718281, de igual manera la base es sobre entendible.

$$\log_e x = \ln x$$

Ejemplo de sistema de logaritmos decimales y neperianos.

$\log 1000 = 3$;porque $1000 = 10^3$ **$\ln 5 = x$;porque $5 = e^x$**

Propiedades de los logaritmos

Muy importante: para aplicar las propiedades de los logaritmos, sus bases tienen que ser iguales.

Propiedades de los logaritmos	Ejemplo de aplicación
El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores: $\log_a (x - y) = \log_a x + \log_a y$	$\log_2 (4 \bullet 8) = \log_2 4 + \log_2 8$ $= 2 + 3$ $= 5$
El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor: $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x \quad \log_a y$	$\log_2 \left(\frac{8}{4}\right) = \log_2 8 - \log_2 4$ $= 3 - 2$ $= 1$
El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base: $\log_a (x^n) = n \log_a x$	$\log_2 (8^4) = 4 \log_2 8$ $= 4 \cdot 3$ $= 12$
El logaritmo de una raíz es igual al cociente entre el logaritmo del radicando y el índice de la raíz: $\log_a (\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \log_a x$	$\log_2 \sqrt[4]{8} = \frac{1}{4} \log_2 8$ $= \frac{1}{4} \cdot 3$ $= \frac{3}{4}$
Si el logaritmo tiene una base positiva y deferente de uno y el número es 1 es cero.	$\log 1 = 0$
Si el logaritmo tiene el número y la base igual, siempre será 1.	$\log_a a = 1$
Si el logaritmo base a de una potencia en base a es igual al exponente.	$\log_a a^n = n$

Te invitamos a dirigirte al momento de la producción y desarrollar la actividad N.º 1

Analiza el procedimiento de cada ejercicio resuelto, para que luego resuelvas, en equipos, grupos de trabajo o de acuerdo a la consigna de tu facilitador o facilitadora.

1. $\log (10 \bullet 100) = \log 10 + \log 100 \Rightarrow \log_{10} 10 + \log_{10} 100 \Rightarrow 1 + 2 = 3$
2. $\log 3\ (27/3) = \log_3 27 - \log_3 3 \Rightarrow \log_3 3^3 - \log_3 3^1 \Rightarrow 3 - 1 = 3$
3. $\log_2 4^3 = 3 \log_2 4 \Rightarrow 3 \log_2 2^2 \Rightarrow 3 \bullet 2 \log_2 2 = 3 \bullet 2 = 6$
4. $\log_6 \sqrt[3]{36} = \frac{(\log_6 36)}{3} \Rightarrow \frac{(\log_6 6^{2})}{3} \Rightarrow \frac{(2 \log_6 6)}{3} \Rightarrow \frac{2 \bullet 1}{3} = \frac{2}{3}$

Ahora es momento de poner en práctica tus conocimientos, desarrollando los siguientes ejercicios.

1. $\log_5 (125 \bullet 625) =$

2. $\log_2 \dfrac{16}{64} =$

3. $\log_3 81^2 =$

4. $\log_2 \sqrt[6]{64}) =$

Te invitamos a dirigirte al momento de la producción y desarrollar la actividad N.º 2

Ecuaciones logarítmicas

Una ecuación logarítmica cuyas incógnitas se encuentran multiplicando o dividiendo a los logaritmos, en sus bases o en el argumento de los logaritmos.

Para resolver con facilidad las ecuaciones logarítmicas, es imprescindible conocer las propiedades de los logaritmos y las propiedades de potenciación, adicional a ello tener la facilidad de resolver ecuaciones de primer y segundo grado, factorización y otros conocimientos de la matemática desarrollados en las etapas de aprendizajes o cursos anteriores.

1. $\log_2 (2x + 4) = 3$
$2x + 4 = 2^3 \quad 2x = 8 - 4$
$x = 4 \dashrightarrow x = 2$

2. $\log_x 25 = 2$
$25 = x^2$
$x^2 = 52 \dashrightarrow x = 5$
$x2 = 25$
$x = \sqrt{25}$

3. $\log_5 (\log_3 x) = 0$
$\log_3 x = 5^0$
$\log_3 x = 1 \dashrightarrow x = 3^1$

4. $\log (\sqrt{x - 3x + 2}) = \log(x)$
$\sqrt{(x^2 - 3x + 2} = x$
$(\sqrt{(x^2 - 3x + 2})^2 = x^2$
$x - 3x + 2 = x^2 \Rightarrow -3x = -2 \Rightarrow x = \dfrac{2}{3}$

5. $\log 2 + \log(x + 3) = \log(x + 5)$
$\log(2 \bullet (x + 3)) = \log (x + 5)$
$\log(2x + 6) = \log (x + 5)$
$2x + 6 = x + 5$
$2x - x = 5 - 6 \Rightarrow x = -1$

6. $\log_{(x+3)} 9 = \log_5 3$

$$\frac{\log_3 9}{\log_3 (x + 3)} = \frac{\log_3 3^1}{\log_3 5}$$

Aplicando cambio de base a los dos miembros

$$\frac{2}{\log_3 (x + 3)} = \frac{1}{\log_3 5}$$

$2 \log_3 5 = \log 3 (x + 3)$
$2 \log_3 5^2 = \log_3 (x + 3)$
$5^2 = x + 3$
$x = 25 - 3 = \dashrightarrow x = 22$

DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN ALTERNATIVA

7. $\log(2x + 5) + \log(2x - 5) = 2\log(x) + \log(3)$
$\log((2x+5) \bullet (2x-5)) = 2\log(x) + \log(3)$
$\log(4x^2 - 25) = 2\log(x) + \log(3)$
$\log(4x^2 - 25) = \log(x^2) + \log(3)$
$\log(4x^2 - 25) = \log(3x^2)$
$4x^2 - 25 = 3x^2$
$X^2 - 25 = 0$
$X^2 = 25$
$x = 5$

8. $\log_2 32 = y$
$2^y = 32$
$2y = 2^5$
$y = 5$

9. $\log_9 \frac{1}{3} = y$
$9^y = \frac{1}{3}$
$(3^2)^y = 3^{-1}$
$3^{2y} = 3^{-1}$
$2y = -1$
$y = -\frac{1}{2}$

10. $\log_9 {}^4\sqrt{{}_3} = y$
$9^y = \sqrt[4]{3}$
$(3^2)^y = \sqrt[4]{3}$
$3^{2y} = 3^{\frac{1}{4}}$
$2y = \frac{1}{4}$
$y = \frac{1}{8}$

11. $\log_2 y3 = 6$
$2^6 = y^3$
$(2^2)^3 = y^3$
$4^3 = y^3$
$y = 4$

12. $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[5]{\frac{1}{81}} = y$
$\sqrt{3}^y = \sqrt[5]{\frac{1}{81}}$
$3^{\frac{y}{2}} = \sqrt[5]{\frac{1}{3^4}}$
$3^{\frac{y}{2}} = \sqrt[5]{3^{-4}}$
$3^{\frac{y}{2}} = 3^{-\frac{4}{5}}$
$\frac{y}{2} = -\frac{4}{5}$
$y = -\frac{8}{5}$

Te invitamos a dirigirte al momento de la producción y desarrollar la actividad N.º 3

Ecuaciones exponenciales

Las ecuaciones exponenciales son aquellas en la que la variable se encuentra en el exponente, para resolver estas ecuaciones es muy importante recordar que:

Si: Ax = Ay entonces x=y

Analizaremos cada uno de los procedimientos a través de ejemplos de ejercicios resueltos

Ejemplo N.º 1

$$3^x = 9$$

Esta ecuación es posible resolverlo de tres formas o métodos diferentes:

1. Aplicando la propiedad, como ya sabemos que si las bases son iguales, por lo tanto los exponentes también se consideran iguales.	$3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 2$
2. Aplicando logaritmo en base (3) y desarrollar aplicando propiedades.	$\log_3 3^x = \log_3 3^2$ $x\log_3 3 = 2\log_3 3$ $x \cdot 1 = 2 \cdot 1 \rightarrow x = 2$
3. Aplicando logaritmo decimal y con el apoyo de calculadora científica.	$3^x = 9 \rightarrow \log 3^x = \log 9$ $x\log 3 = \log 9 \rightarrow x = \frac{\log 9}{\log 3}$ $x = \frac{0{,}9542}{0.4771} \rightarrow x = 2$

Ejemplo N.º 2

$$2^{(x+1)} + 5 \cdot 2^x = 28$$

Aplicando factorización:

Extrayendo el factor común x2 y luego seguir desarrollando.

Aplicamos la propiedad de potenciación de un producto:	$2^{x+1} + 5 \cdot 2^x = 28$ $2 \cdot 2^x + 5 \cdot 2^x = 28$
Aplicando factorización: Extrayendo el factor común 2x y luego seguir desarrollando.	$2^x (2 + 5) = 28$ $7 \cdot 2^x = 28$ $2x = \frac{28}{7}$ $\rightarrow$ $2^x = 4$ $2^x = 2^2$ $x = 2$

Ejemplo N.º 3

$$9 \cdot \sqrt[3x-1]{9} = 9^x$$

$\sqrt[3x-1]{9} = \frac{9^x}{9}$ $\sqrt[3x-1]{3^2} = \frac{(3^2)^x}{3^2}$ $\rightarrow$ $3^{\frac{2}{3x-1}} = \frac{3^{2x}}{3^2}$ $3^{\frac{2}{3x-1}} = 3^{2x-2}$ $\frac{2}{3x-1} = 2x - 2$ $\rightarrow$ $2 = (3x-1) \cdot (2x-2)$ $2 = 6x^2 - 6x - 2x + 2$ $2 = 6x^2 - 8x + 2$ $6x^2 - 8x = 0$ $x(6x - 8) = 0$ $x = 0, \quad x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$	
Por tanto, la ecuación exponencial tiene dos soluciones:	$x = 0, \; ; \; x = \frac{4}{3}$

Ejemplo N°4	Ejemplo N°5	Ejemplo N°6
$4 \log x = 2\log x + \log 4 + 2$ $\log x^4 = \log x^2 + \log 4 + \log 100$ $\log x^4 - \log 4 = \log x^2 + \log 100$ $\log\left(\frac{x^4}{4}\right) = \log(100x^2)$ $x^4 = 400x^2$ $x^2 (x2 - 400) = 0$ $x^2 = 0$ ó $x^2 = 400$ $x = 0$ ó $x = +- 20$	$2 \log x = \log(5x - 6)$ $\log x^2 = \log (5x - 6)$ $x^2 = 5x - 6$ $x^2 - 5x + 6 = 0$ $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} =$ $x = 3 \quad ; \quad x = 2$	$\boxed{\log_{\frac{1}{2}} 0{,}25 = y}$ $\log_{\frac{1}{2}} 0{,}25 = y$ $\frac{1^y}{2^y} = \frac{1}{4} \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^y = 0{,}25$ $\frac{1}{2^y} = \frac{1}{4} \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^y = \frac{1}{4}$ $2y = 4$ $y = 2$

Te proponemos algunas ecuaciones exponenciales, para que resuelvas con el apoyo de tu facilitadora o facilitador:

1. $9^{\sqrt{x}}=81$	2. $(0{,}25)^{(2x-1)}=(1/2)^2$
3. $7^{(3x+4)}= 49^{(2x-3)}$	$\sqrt[2x-1]{3^{x-3}} =\sqrt{27}$

APRENDIZAJES COMPLEMENTARIOS - MATEMÁTICA

Te invitamos a dirigirte al momento de la producción y desarrollar la actividad N.º 3

Sistema de ecuaciones logarítmicas y exponenciales

Un sistema de ecuaciones logarítmicas es un sistema de dos o más ecuaciones en el que alguna incógnita puede estar en el argumento de un logaritmo. Por lo tanto, para resolver un sistema de ecuaciones logarítmicas se deben aplicar las propiedades de los logaritmos y luego el procedimiento de sistema de ecuaciones algebraicas.

Ejemplos de ejercicios resueltos, analicemos cada uno de los procedimientos.

1er paso. El 3 y 1 del segundo miembro, escribimos como logaritmo en base	$3 = \log_{10} 10^3 \qquad \log_{10} 1000$ $1 = \log_{10} 10^1 \qquad \log_{10} 10$
2do paso. Reemplazando lo que se obtuvo del 3 y 1	$\begin{cases} \log_{10}(x \cdot y) = \log_{10}(1000) \\ \log_{10}\left(\frac{x}{y}\right) = \log_{10}(10) \end{cases}$
3er paso. Igualando los argumentos de los logaritmos quedará	$(x \cdot y) = 1000$ $\frac{x}{y} = 10$
4to paso. Despejando "x "de la segunda ecuación	$x = 10y$
5to paso: Reemplazando el valor de "x" en la primera ecuación	$10y \cdot y = 1000 \qquad y^2 = 1000/10$
6to paso. Despejando "y" para encontrar su valor	$y = \sqrt{100} \qquad y=10 \ ; \ y = -10$
7mo paso. Reemplazando los valores de "Y" tenemos el valor de "x"	$x = 10 \cdot 10 \qquad x = 100; \ \ x = -100$
Por tanto, el resultado de la ecuación logarítmica es:	$\begin{cases} x = 100 \\ y = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -100 \\ y = -10 \end{cases}$

Ejemplo N.º 2

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\log_2(x) + \log_2(y) = 2$ **b)** $2\log_5(x) - \log_5(y) = 1$

$\log_2(2x) - \log_2(y) = 1 \qquad \log_5(x) + \log_5(y) = 2$

DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN ALTERNATIVA

$\log_2(x)+\log_2(y=\log_2 4$ $\log_2(2x)-\log_2(y)=\log_2 2$		
$\log_2(x.y)=\log 24$ $\log_2(2x/y)=\log 22$		
$x \cdot y = 4$ $\frac{2x}{y} = 2$	1) $y = \frac{4}{x}$ 2) $\frac{2x}{y} = 2$	
Reemplazando el valor de "y" en la 2da ecuación	$\frac{2x}{\frac{4}{x}} = 2$	
$\frac{2x}{4} = 2 \dashrightarrow x^2=4$ $x=2\ ;\ x=-2$		
El valor de "x" será solo el 2 positivo, ya que no existe el logaritmo de un número negativo, por lo tanto:		

Aplicación de los logaritmos

Los logaritmos son muy importantes ya que nos permiten realizar ciertos cálculos, entre ellos podemos mencionar:

- Los estudios de los efectos nutricionales de nuestro organismo
- Cálculo del nivel de PH de nuestro organismo
- Determinar diferentes estadísticas
- Las probabilidades sobre la herencia genética
- La intensidad de los sismos y otras

Te invitamos a investigar cual es la causa del deterioro de estas infraestructuras de las imágenes y en que parte del mundo sucedió.

R.- ....

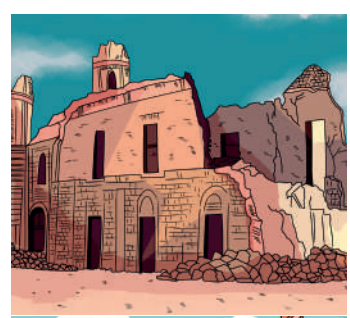
....

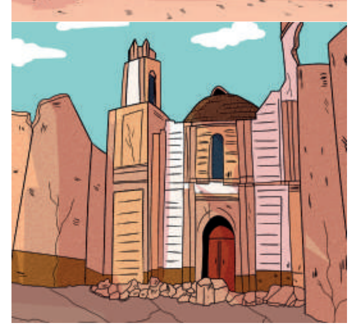
....

....

....

....





1. La magnitud de los sismos (Escala de Richter)

Una escala habitualmente es utilizada en la medición de la intensidad de los sismos, conocida como la escala de Richter.

Calculada mediante la expresión logarítmica $$M = \log\left(\frac{S}{A}\right)$$

Donde:

M = magnitud del terremoto

S = el periodo medido en segundos

A = la amplitud media en micrómetros (1micrometro=10-4)

Muy importante: Dado que la escala de Richter es una escala logarítmica de base 10, cada incremento de uno en la escala de Richter indica una intensidad diez veces más fuerte que el número previo en la escala.

Reflexionamos sobre nuestras actividades cotidianas y proyecciones educativas.

En grupos de tres o cuatro analizamos sobre la importancia o negatividad de las siguientes consignas:

Análisis e importancia de los logaritmos

La importancia de la matemática, específicamente los logaritmos en nuestra vida cotidiana y el aporte a las ciencias.

¿Es significativo desarrollar los temas generadores del PSP. Articulando a los contenidos curriculares?, de qué manera:

Aplicamos los conocimientos adquiridos en la teoría.

Desarrollar la actividad N.° 1. Es hora de poner en práctica tus conocimientos.

Actividad N° 1 Aplica a la definición de logaritmo y encuentra el valor de "X" de los siguientes ejercicios	**a)** $\log_2 63 = x$	**b)** $\log_2 8 = x$	**c)** $\log_x 125 = 3$
	d) $\log_2 x = 3$	**e)** $\log_x 16 = 4$	**f)** $\log_{1/2} 4 = x$
	g) $\log_5 x = 2$	**h)** $\log_3 x = 1$	**i)** $\log_x 81 = 4$

Actividad N.º 2. Desarrolla las siguientes propiedades y escribe el nombre.

1.	$\log_p 63 =$	
2.	$\log_b \left(\frac{p}{q}\right) =$	
3.	$\log_b \sqrt[n]{a^m} =$	
4.	$\log_b (p^n) =$	
5.	$\log (p \cdot b) =$	

Actividad N.º 3. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

1. $2\log x = 3 + \log \frac{x}{10}$	5. $\frac{\log (16 - x^2)}{\log (3x - 4)} = 2$
2. $\log x + \log (x + 3) = 2 \log (x + 1)$	6. $\log_2 (x + 4)$
3. $\log_3 (2x^2 + 5x + 4) -7 = 2$	7. $\log_x (7) = 3$
4. $\log (25 - x^3) - 3 \log (4 - x) = 0$	8. $\log (\frac{x}{2} + 90) = 3$

Actividad N.º 4. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.

1. $4x^{2 - 6x} = 16384$	5. $5^{(\frac{5}{x})} = \sqrt{125}$
2. $3x^{2 - 1} = 1134$	6. $\log_7 x (\log_7 (x - 2)) = 3$
3. $2^{(x - 1)} = 2^{(2x - 4)}$	7. $\sqrt{27} = 3^{2x}$
4. $5^{(2x)} = 5^{(3x - 2)}$	8. $9^{\sqrt{x}} = 81$

Actividad N.º 5 ejercicios propuestos de sistema de ecuaciones.

1. $\begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ x - y = 20 \end{cases}$	2. $\begin{cases} \log x + \log y = \log 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$	3. $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ 2 \log x - 2 \log y = -1 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x + y = 70 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$	5. $2 \log_5 x + \log_5 (y + 1) = 2$ $x^2 + y^2 = 25$	6. $\log_3 3x + \log_3 3y = 3$ $2x + y = 7$

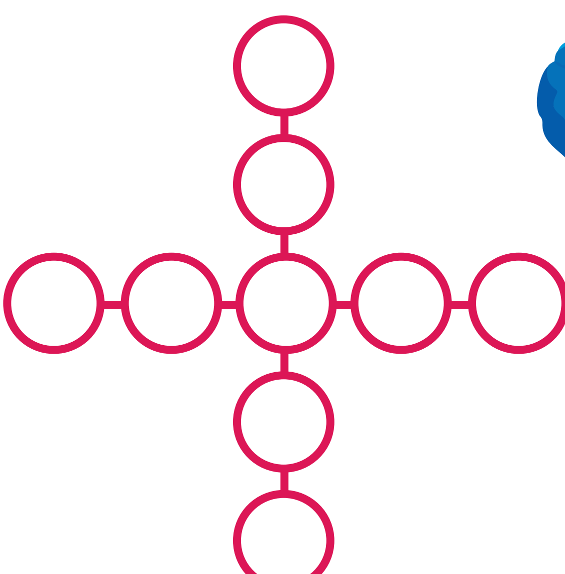
Unidad temática N° 2:

Progresiones aritméticas y geométricas

Observa cuidadosamente y resuelve:

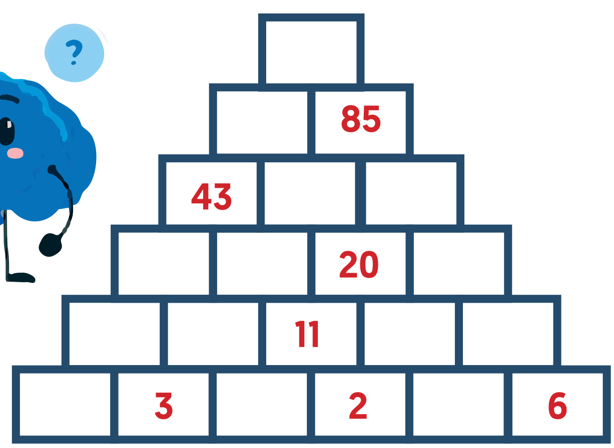
Mentalizados

Distribuye en cada círculo números del 1 al 9, de manera que cada línea sume 27.



Mentalizados

Completar:



La caja de los miedos

Objetivo: Desarrollar empatía en compañeros del aula. En la caja que la/el Facilitadora/or colocó en el aula, los estudiantes deben colocar un papelito donde escribirán dos de sus mayores miedos, los papelitos se leerán en el aula y los estudiantes levantarán la mano si se identifican con alguno de los miedos.

Exploremos la teoría

¿SABÍAS QUE?

Estudios han demostrado que la habilidad en la resolución de problemas matemáticos está relacionada con una mejor salud.

¿Qué es una progresión aritmética?

Una progresión aritmética es una secuencia de números que van variando una misma cantidad por vez (llamada diferencia “d”), ya sea aumentando o disminuyendo en la siguiente cantidad.

Por ejemplo, la sucesión matemática 4, 6, 8, 10,..., es una progresión aritmética de razón constante 2, así como 5, 2, −1, −4,... es una progresión aritmética de razón constante −3.

Símbolos

- a1 = Primer término
- an = Término de lugar “n” ó último término
- d = Diferencia
- n = Número de términos
- S = Suma de términos

Fórmulas

1. $a_1 = a_n - (n-1)\,d$
2. $d = \dfrac{(a_n - a_1)}{(n-1)}$
3. $n = \dfrac{(a_n - a_1)}{r+1}$
4. $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)\,n}{2}$
5. $a_n = a_1 + (n-1)\,d$

Conceptos básicos

- Progresión. Una progresión es una secuencia de números obtenidos mediante una variante continua.
- A cada valor de la secuencia le denominaremos Término.
- A la cantidad fija que determina la diferencia de un término a otro se le denomina diferencia, y se representa con d.

Término general.

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$

$a_4 = a_3 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 3d$

$a_5 = a_4 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 4d$

$a_n = a_{n-1} + d = (a_1 + (n - 2)d) + d = a_1 + (n - 1) d$

$a_n = a_1 + (n - 1)d$

¿Qué es y para qué sirven las progresiones aritméticas?

La matemática se vuelven más interesantes cuando encontramos su uso real. Entonces, ¿para qué sirven las progresiones en la vida real?

Las progresiones esencialmente nos sirven para hacer demostraciones. Por ejemplo, el simple hecho de contar las monedas en nuestro bolsillo para saber cuánto dinero tenemos en total, es una progresión.

Aprendamos juntos a resolver progresiones aritméticas

Ejemplo N.° 1

Si el primer término es 2 y la diferencia es 3, determinar la sucesión aritmética:

1. **Datos:**

   a1 = 2

   r = 3

   a_n =?

   Es importante empezar reconociendo los datos que nos ofrece el problema.

2. Determinamos la sucesión de términos

   P.A.: a1 , a2 , a3 , a4 , ... , a_n

3. Sumamos el valor de la razón a cada termino para determinar cada término de la sucesión aritmética.

P.A.: 2, (2+3), (2+3+3), (2+3+3+3), ... , a_n.

P.A.: 2, 5, 8, 11 ...

La progresión aritmética es: 2, 5, 8, 11, ... , es una progresión CRECIENTE

Practicamos en el aula, con la ayuda de la/el profesor/a hallamos el:

9° término de la PA: 7, 11, 15, ...

12° término de la PA: 5, 10, 15, ...

32° término de la PA: 8, 12, 16, ...

47° término de la PA: 7, 11, 15, ...

29° término de la PA: 12, 8, 4, ...

13° término de la PA: -6, -2, 2, ...

Ejemplo N.° 2

Hallamos la diferencia en la siguiente Progresión Aritmética: 3, ..., 8, en el que 8 es el 6° término:

Datos

$a_1 = 3$

$a_6 = 8$

$n = 6$

$d = ?$

Es importante empezar reconociendo los datos que nos ofrece el problema.

Hallamos la diferencia:

$$d = \frac{(a_6 - a_1)}{(n-1)}$$

$$d = \frac{(8 - 3)}{(6 - 1)}$$

$$d = \frac{5}{5}$$

Determinamos que la diferencia es:

$d = 1$

Construimos la progresión aritmética remplazando el valor de la razón

P.A.: 3,(3 + 1),(3 + 1 + 1),(3 + 1 + 1 + 1),...,8

Por último, la progresión compuesta de 6° términos quedaría:

P.A.: 3,4,5,6,7,8.

Ejemplo N°3.

Deseamos saber cuántos surcos de papa cosechó un agricultor el 9no día de cosecha, sabemos que a1 = 10, d = 2 y n = 9, entonces:

Datos:

$a_1 = 10$

$r = 2$

$n = 9$

$a_9 = ?$

Es importante empezar reconociendo los datos que nos ofrece el problema.

Iniciamos determinando la fórmula apropiada a aplicar.

$$a_9 = a_1 + (n - 1)\,d$$

En este caso en particular aplicaremos a formula N° 5 del formulario, debido a que nos pide hallar el termino enésimo de la progresión.

Reemplazamos los datos que tenemos a la formula.

$$a_9 = 10 + (9 - 1)\,2$$

Es importante recordar que primeramente debemos eliminar los paréntesis, realizando las operaciones adecuadas.

Resolvemos la operación multiplicando el paréntesis por la diferencia.

$$a_9 = 10 + (8)\,2$$

Es importante en la multiplicación tomar en cuenta los signos de cada termino.

Concluimos con las operaciones restantes.

$$a_9 = 10 + 16$$

$$a_9 = 26$$

Si analizamos la respuesta determinamos que el agricultor podrá cosechar 26 surcos en el noveno día de trabajo.

¿SABÍAS QUÉ?

El único número que no puede representarse en números romanos es el número 0. ¿Cómo lo representaban entonces? La palabra del latín «nulla» era la que se usaba para referirse a cero.

Ejemplo N.° 2.

Una niña guarda en su alcancía 3 Bs. cada día y comenzó a guardar con un regalo de 15 Bs que recibió en su cumpleaños. ¿Cuánto dinero ahorro después de 18 días?

Datos:

a1 = 15

d = 3

n = 18

S =?

Es importante empezar reconociendo los datos que nos ofrece el problema. Analizando el problema podemos determinar que se nos pide la suma total del dinero ahorrado durante los 18 días.

Iniciamos determinando la fórmula apropiada a aplicar.

$$S = \frac{(a_1+a_n)}{2\times n}\times n$$

En este caso en particular aplicaremos a fórmula N° 4 del formulario, debido a que nos pide hallar la suma del dinero ahorrado.

Analizando la fórmula vemos que nos falta un dato.

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, d$$

$$a_8 = 15 + (18 - 1)\, 3$$

$$a_8 = 15 + (17)\, 3$$

$$a_8 = 66$$

En este caso debemos hallar el ultimo termino de la progresión aritmética, los resolvemos como ya sabemos.

Con los datos completos ahora si aplicamos la fórmula correspondiente.

$$S = \frac{(15+66)}{2}$$

Reemplazamos los datos a la fórmula de la suma de términos y realizamos las operaciones correspondientes.

Hallamos la suma de términos de la progresión aritmética.

$$S = \frac{(15 + 66)}{2}\times 18$$

$$S = \frac{(81)}{2}\times 18$$

$$S = 40{,}5 \times 18$$

$$S = 729$$

Si analizamos la respuesta determinamos que la niña ahorro 729 Bs.

¿Cuánto aprendimos?

En el cuaderno de prácticas resuelve los siguientes problemas y anota los resultados en los cuadros de color.

1. Construir una progresión aritmética de 8 términos, sabiendo que a1 = - 6 y d = - 4.

R. ....

....

2. Con los datos que se dan, determinar en cada ejercicio el término señalado.

   $a_4 = 11$; $d = 3$; $a_8 = ?$

   $a_7 = 18$; $d = 7$; $a_4 = ?$

   $a_{14} = 73$; $d = -5$; $a_5 = ?$

   $a_6 = 2x$; $d = x - a$; $a_{10} = ?$

3. Clemente tiene un depósito con 10 cajas de tomate numerados del 1al 10 y guarda n cantidad de tomates en cada caja. Después de haber usado las 10 cajas, ¿cuántos objetos ha guardado Clemente en total?

R. ....

....

4. Si las edades de Celestino, José y Genoveva, forman una progresión aritmética cuya suma es 54. Calcule la edad de José si se sabe que no es mayor ni el menor.

R. ....

....

5. Don Genaro se compró un tractor, pero no puede pagarlo al contado. Trabajando mucho logra pagar 40 dólares cada semana, pero el vendedor le sube 5 dólares cada semana como pago por interés. Logra pagar el tractor después de 24 semanas de pago. ¿Cuánto le costó el tractor en total? ¿Cuánto pagó de interés? ¿Qué porcentaje es el interés con relación al precio de venta?

R. ....

....

6. Un estudiante egresado de la Especialidad de Sistemas informáticos del Centro de Educación Alternativa “Virgen del Rosario” adquiere 12 computadoras para abrir un café Internet, cada computadora tiene un costo de Bs. 5000. Si cada año se deprecia en Bs. 510 ¿Cuánto será el valor de una computadora después de 6 años?

R. ....

....

Resolvemos progresiones:

JUEGA CON TUS COMPAÑEROS

Resuelve la progresión

4, 8, 12, 16, ...24, 28,.....36

TARJETAS, VALES, PUNTOS

Objetivo: fortalecer la práctica colectiva en la resolución de problemas de progresiones aritméticas.
Con la ayuda del Facilitador, en cartulina construimos tarjetas, en las que anotaremos los problemas a resolver y los puntos que valdrá la tarjeta, se repartirán las tarjetas entre los participantes los cuales resolverán el problema en el pizarrón.
Nota: solo se asigna el puntaje si el problema se respondió correctamente.

¿Qué es una progresión geométrica?

Una progresión geométrica, es una sucesión de números reales en la que cada término (menos el primero), se obtiene multiplicando el anterior por una cantidad fijar, llamada razón de la progresión. La razón se obtiene al hacer el cociente entre dos términos consecutivos:

¿SABÍAS QUE?

El matemático griego Eratóstenes llegó a calcular el diámetro de nuestro planeta utilizando únicamente un palo clavado en el suelo.

Ejemplo. Determinamos como primer término a1 = 5 y una razón r = 3 podríamos construir la siguiente progresión geométrica:

5, 15, 45, 135, 405, 1215, 3645, ...

$$\frac{a2}{a1} = \frac{a3}{a1} = \frac{a4}{a3} = \ldots\ldots\ldots \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

El término general de una progresión geométrica cuyo primer término es a1 y la razón es r entonces tendremos:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Términos

a_1 = Primer término

a_n = Término de lugar "n" ó último término

r = Razón

n = Número de términos

S = Suma de términos

Formulas.

1. $a1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}$

2. $a_n = a_1 \times r^{n-1}$

3. $r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$

4. $n = \frac{\log \frac{a_n}{a_1}}{\log r} + 1$

5. $S_n = \frac{a_1 (r^n - 1)}{r - 1}$ x

6. $a_n = a_1 \times r^{n-1}$

¿Qué es y para qué sirven las progresiones geométricas?

Las progresiones geométricas tienen varias aplicaciones en la vida diaria como el cálculo de intereses de algún préstamo bancario, nos sirve para medir el crecimiento poblacional de alguna especie o para medir el aumento de la velocidad de objetos y partículas, la división celular (ya sea por mitosis o meiosis) también es un buen ejemplo, consiste en la división de una célula para dar lugar a dos.

Aprendamos juntos a resolver progresiones geométricas

EJEMPLO 1	EJEMPLO 2
Progresión: 2, 8, 32, 128, ... r = 4	Progresión: 256, 64, 16, 4,...... r = -4
Hallar el termino 12°	Hallar el termino 8°
Solución. $a_n = a_1 * r^{n-1}$ $a_{12} = 2 * 4^{12-1}$ $a_{12} = 2 * 4^{11}$ $a_{12} = 2 * 4194304$ $a_{12} = 8388608$	**Solución.** $a_n = a_1 * r^{n-1}$ $a_8 = 256 * (-4^{8-1})$ $a_8 = 256 * (-4^7)$ $a_8 = 256 * (-16384)$ $a_8 = -4194304$
La progresión es CRECIENTE	La progresión es DECRECIENTE

Ejercicios

Hallamos el:

9° término de la PG: 3, 6, 12,...

12° término de la PG: 8, 4, 2 ,...

DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN ALTERNATIVA

32° término de la PG: 3, 15, 45,...

47° término de la PG: 7, 35, 175,...

29° término de la PG: 2,8, 32,...

13° término de la PG: –6,–18,–36,...

Suma de N-Términos de una progresión geométrica

La fórmula n-términos para la suma de los "n" primeros términos de una progresión geométrica es hallar el:

$$Sn = a1\left(\frac{r^{n-1}}{r-1}\right) \quad \text{O} \quad Sn = \frac{an * r - a1}{r-1}$$

EJEMPLO 1	EJEMPLO 2
Progresión: 3, 6, 12, 24, 48, 96, ...	Progresión: 2, 8, 32, 128, 512, ...
Suma de n términos:	Suma de n términos:
Solución. $Sn = \frac{an * r - a_1}{r-1}$ $S_6 = \frac{96 * 2 - 3}{2-1}$ $S_6 = \frac{192 - 3}{1}$ $S_6 = 189$	**Solución.** $S_n = \frac{an * r - a_1}{r-1}$ $S_5 = \frac{512 * 4 - 2}{4-1}$ $S_5 = \frac{2048 - 2}{3}$ $S_5 = 682$

Ejemplo N.° 3: Un agricultor compró un tractor para ayudarse en la siembra de papas, después de un tiempo se da cuenta que este tractor pierde el 20% de su valor por año. Si el tractor costo 50.000 dólares ¿Cuánto valdrá después de 4 años de usarlo?

Datos:

a_0= 50.000 $

a_1 = 50.000 x 80/100 = 40.000

a_2= 40.000 x 80/100= 32.000

r = 80/100

n = 4

a_n = ?

En a1 = sacamos el 80% que seria el costo del tractor después de un año, y en a2, pasa exactamente lo mismo, sacamos el 80% de a1, de esta forma deducimos que r = 80/100

APRENDIZAJES COMPLEMENTARIOS - MATEMÁTICA

Iniciamos determinando la fórmula apropiada a aplicar.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

En este caso en particular aplicaremos la fórmula N° 2 del formulario, debido a que nos pide hallar el termino enésimo de la progresión.

Reemplazamos los datos que tenemos en la fórmula.

$$a_4 = 40.000 \times \frac{80}{100}^{4-1}$$

En este caso en particular aplicaremos la fórmula N° 2 del formulario, debido a que nos pide hallar el termino enésimo de la progresión.

Resolvemos la operación multiplicando el exponente de la razón.

$$a_4 = 40.000 \times \left(\frac{80}{100}\right)^3$$

Es importante recordar que debemos analizar muy bien el problema antes de reemplazar los datos.

Concluimos con las operaciones restantes.

$$a_4 = 40.000 \times 0.512$$
$$a_4 = 20.480\ \$$$

Si analizamos la respuesta determinamos que el tractor después de 4 años de uso tiene un valor de 20.480 dólares.

Ejemplo N.°4. Después de mucho tiempo un joven consiguió un trabajo, donde el lunes ganó 40 Bs y cada día después ganó el doble de lo que ganó el día anterior ¿Cuánto ganó el viernes y cuanto ganó en los 5 días que trabajo?

Datos:

$a_1 = 40$

r = 2 (gana el doble)

$n = 5$

$a_5 =?$

$S =?$

Es importante empezar reconociendo los datos que nos ofrece el problema. Analizando el problema podemos determinar que se nos pide encontrar el 5to término de la progresión y la suma total del dinero ganado en los cinco días de trabajo.

Iniciamos determinando las fórmulas apropiadas a aplicar.

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

$$S = \frac{a_1 (r^n - 1)}{r - 1} \times n$$

En este caso en particular aplicaremos a formula N° 2 y N° 5 del formulario.

Analizando determinamos que debemos empezar hallando el 5to término.

$$a_5 = a_1 \times r^{n-1}$$

$$a_5 = 40 \times 2^{5-1}$$

$$a_5 = 40 \times 2^4$$

$$a_5 = 640$$

Resolviendo el problema como ya aprendimos determinamos que el 5to día el joven ganó 640 Bs.

Hallamos la suma de lo ganado en toda la semana.

$$S_5 = \frac{a_1 r^n - 1}{r - 1}$$

$$S_5 = \frac{40\ (2^5 - 1)}{2 - 1}$$

$$S_5 = \frac{40\ (31)}{1}$$

$$S_5 = 1.240$$

Reemplazamos los datos en la fórmula de la suma de términos y realizamos las operaciones correspondientes.

Determinamos que la suma de lo que ganó el joven en toda la semana fue de 1.240 Bs

¿Cuánto aprendimos?

Resuelve los siguientes problemas y anota los resultados en los cuadros de color.

1. Supongamos que la población de Bolivia crece anualmente el 1.56 % y la población inicial de Bolivia es de 12.079.472 entonces ¿cuantos habitantes tendrá nuestro país después de 8 años?

   R. ....

   ....

2. Un agricultor desea determinar la cantidad de duraznos cosechados en los cuatro primeros días de cosecha, se sabe que el segundo día cosechó 8 duraznos y el cuarto día cosechó 234 duraznos (a2 = 8 y a4 = 234).

   R. ....

   ....

3. Se sabe que una cantidad de dinero aumenta a razón de una progresión geométrica de valor 4 cada día, y el tercer término vale 320. Halla la suma de los ocho primeros términos.

R. ....

....

4. Determinar la razón de las siguientes progresiones geométricas:

a) 4, 20, 100, 500,... **R.** ....

b) 6, 42, 294, 2,058,... **R.** ....

c) 5, 2.5, 1.25, 0.625... **R.** ....

5. Hallamos el término enésimo de la progresión geométrica:

a) 81, 27, 9, 3, ..., a1 **c) 4096, 1024, 256, 64, ..., a8**

b) 64, 32, 16, 8, ..., a8 **d) 27, 81, 243, 729, ..., a35**

6. Hallamos la suma n-términos de la progresión geométrica:

a) 243, 81, 27, 9, ..., a23 **c) -7, -35, -175, -1750, ...**

b) -81, -243, -729, -2187, ..., a15 **d) -9, -36, -144, -576, ...**

Resolvemos progresiones:

JUEGA CON TUS COMPAÑEROS

Resuelve la progresión

4, 8, 12, 16, ...24, 28,.....36

TARJETAS, VALES, PUNTOS

Objetivo: fortalecer la práctica colectiva en la resolución de problemas de progresiones geométricas.
Usamos las tarjetas realizadas y con la ayuda del facilitador anotamos los problemas matemáticos de progresión geométrica a resolver y anotando los puntos que valdrá cada tarjeta, se repartirán las tarjetas entre los participantes los cuales resolverán el problema en el pizarrón.
Nota: solo se asigna el puntaje si el problema se respondió correctamente.

Unidad temática N.º 3:

Lógica formal y simbólica para el desarrollo del razonamiento

Observemos

Escribe una frase que defina las imágenes que se presentan:

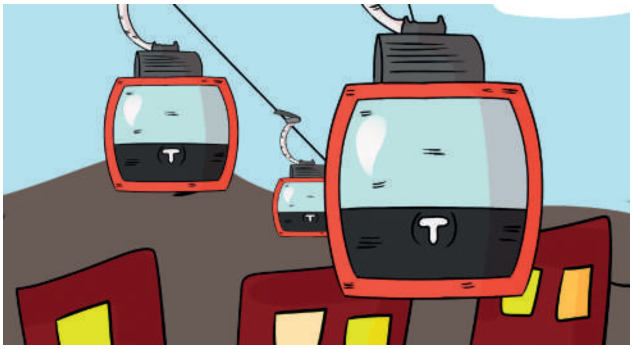
R. ....

....

....

....

....



R. ....

....

....

....

....

R. ....

....

....

....

....

Lo que acabas de hacer al escribir la frase correspondiente a cada imagen la llamaremos enunciado.

Hay que señalar que estos enunciados pueden ser verdaderos o falsos.

En el siguiente cuadro escribe completando las definiciones de cada signo:

SÍMBOLO	NOMBRE	SIGNIFICADO
$\wedge$		**Conjunción**
$\vee$	**.... o ....**	
$\rightarrow$		**Condicional**
$\leftrightarrow$	**... si y solo si ...**	
$\underline{\vee}$	**Para todo ...**	

En el cuadro de arriba tenemos los cinco signos fundamentales que sirven de conectivos entre dos proposiciones simples formando así una proposición compuesta.

A continuación, utilizando los enunciados que realizaste de los tres dibujos iniciales y utilizando los diferentes conectivos elabora una proposición compuesta en cada uno de los siguientes marcos.

R.	$\wedge$	R. ....
R.	$\vee$	R. ....
R.	$\rightarrow$	R. ....
R.	$\leftrightarrow$	R. ....

Brevemente, escribamos lo que entendemos sobre las proposiciones en matemáticas.

Exploremos la teoría

Utiliza recursos virtuales para tener un documento base de apoyo al tema. Puedes recurrir a el las veces que lo necesites.

LÓGICA PROPOSICIONAL EJERCICIOS RESUELTOS

En el internet puedes buscar un texto de LÓGICA MATEMÁTICA, que sea fácil de entender por tu parte y puedes tener ese material como un documento referencial al que puedes recurrir las veces que tu creas necesario.

Te aconsejo que puedas buscar tutoriales cortos en YOUTUBE, para que así puedas ver con mayor objetividad el procedimiento que tienes que seguir para una mejor comprensión del tema.

Exploremos la teoría

Proposiciones simples y compuestas

Algo que tenemos de tener claro para poder realizar procesos lógico matemáticos es que una proposición debe ser necesariamente falso (f) o verdadero (v), pero no puede ser ambos al mismo tiempo. Ya que son expresiones de ideas completas. Expresiones que denotan sentimientos, saludos, ofuscación.... No pueden considerarse proposiciones porque las mismas de acuerdo a cada realidad tienen sus propias valoraciones de falso y verdad, son solo enunciados y nada más.

Ejemplos de proposiciones:

Mi hermano mayor nació tres años antes que yo.

La raíz cuadrada de 36 es 6

La Paz es ciudad altiplánica, Cochabamba una ciudad del Valle y Santa Cruz una ciudad tropical.

Juana Azurduy de Padilla es la Generala de la independencia de Bolivia.

Sucre es la Capital constitucional de Bolivia.

Ahora veremos ejemplos de enunciados que no pueden ser proposiciones:

Es más fácil aprender química que matemática.

El frío es más saludable que el calor.

Te amo demasiado

El cielo es bello como tu persona

Los últimos cuatro enunciados no pueden considerarse proposiciones porque de acuerdo a cada persona estas expresiones pueden variar en su aceptación como FALSO o VERDADERO, por esto se debe tener mucho cuidado al momento de identificar una proposición de solo un enunciado.

Proposiciones simples

Los enunciados que han realizado al inicio de este tema podemos decir que son PROPOSICIONES porque lo que han escrito son expresiones VERDADERAS o FALSAS, adicionalmente a eso podemos decir que estas son PROPOSICIONES SIMPLES. Veamos algunos ejemplos:

$$4(x+2)+2x=6x+2$$

El año tiene cuatro estaciones

El 1ro de mayo es día del trabajador boliviano.

Simón Bolívar fue el libertador de América.

Cada proposición puede representarse con una de las letras minúsculas p, q, r, s...

PROPOSICIÓN	COMPONENTE
$4(x + 2) + 2x = 6x + 2$	**p**
El año tiene cuatro estaciones	**q**
El 1ro de mayo es día del trabajador boliviano.	**r**

Proposiciones compuestas

Si a las proposiciones simples le unimos con uno o más conectivos, estas proposiciones se las denomina PROPOSICIONES COMPUESTAS, veamos los siguientes ejemplos:

El departamento de La Paz en occidente. (p)

El departamento de Santa Cruz en el oriente. (q)

Pertenecen al estado plurinacional de Bolivia (r)

El departamento de La Paz en occidente **∧** el departamento de Santa Cruz en oriente —> pertenecen al estado plurinacional de Bolivia.

Ahora lo escribimos en forma simbólica.

p ∧ q —> r

<u>el sol de día</u> y <u>la luna de noche</u>

p **q**

<u>Siete es un número impar</u> y <u>es un número primo</u>

p **q**

En los siguientes recuadros escribe proposiciones compuestas con los conectivos señalados:

APRENDIZAJES COMPLEMENTARIOS - MATEMÁTICA

R. .... y ....

R. .... o ....

R. .... y ....

R. .... y ....

Conectivos

Al inicio de esta unidad temática se ha completado esta tabla con los nombres y significados correspondientes en los espacios vacíos que así era necesario.

SÍMBOLO	NOMBRE	SIGNIFICADO
$\wedge$		Conjunción
$\vee$	.... o	
$\rightarrow$		Condicional
$\leftrightarrow$	... si y solo si ...	
$\underline{\vee}$	Para todo ...	

A estos símbolos se los llama **conectivos lógicos matemáticos,** y el uso de estos en una **proposición** o **más** para realizar **operaciones** nos dará como resultado **otra proposición** llamada **resultado**.

Ahora veamos la siguiente tabla, verifiquemos y reforcemos nuestros saberes para poder utilizar estos **conectivos lógicos matemáticos** para realizar operaciones de proposiciones y así con ellas encontrar los resultados correspondientes.

CONECTORES LÓGICOS	EXPRESIÓN EN EL LENGUAJE NATURAL	SÍMBOLO	REPRESENTACIÓN
NEGACIÓN	No es cierto que	$\sim$	$\sim p$
CONJUNCIÓN	... y ...	$\wedge$	$p \wedge q$
DISYUNCIÓN INCLUSIVA	... o ...	$\vee$	$p \vee q$
CONDICIONAL	Si...entonces...	$\rightarrow$	$p \rightarrow q$
BICONDICIONAL	...Si sólo si...	$\leftrightarrow$	$p \leftrightarrow q$
DISYUNCIÓN EXCLUSIVA	o ... o ...	$\underline{\wedge}$	$p \underline{\wedge} q$

Ahora veremos algunos ejemplos del uso y aplicación de los CONECTIVOS y las PROPOSICIONES.

Proposiciones:

1. Un cuadrado tiene cuatro lados = p
2. Un triángulo tiene tres lados = q
3. Es figura geométrica = r

Operaciones lógicas.

Un cuadrado tiene cuatro lados y un triángulo tiene tres lados.

$$p \wedge q$$

Un cuadrado tiene cuatro lados o un triángulo tiene tres lados.

$$p \vee q$$

Un cuadrado tiene cuatro lados y es figura geométrica

$$p \wedge q$$

Un triángulo tiene tres lados entonces es figura geométrica.

$$p \rightarrow q$$

(Un cuadrado tiene cuatro lados y un triángulo tiene tres lados) entonces es figuras geométricas.

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

Proposiciones:

1. Soy del altiplano = **p**
2. Soy del valle = **q**
3. Soy del oriente = **r**
4. Soy boliviano = **s**
5. ....

Escribe sobre la línea punteada tu propio gentilicio

Operaciones lógicas

1. ....
2. ....
3. ....

A continuación utilizando diferentes conectivos realiza operaciones de relacionamiento lógico matemático.

4. ....

5. ....

6. ....

Proposiciones.

1. .... = p
2. .... = q
3. .... = r

Seguidamente escribe proposiciones lógico matemático relacionadas a tu entorno.

Operaciones lógicas:

1. ....
2. ....
3. ....
4. ....
5. ....
6. ....

A continuación utilizando diferentes conectivos realiza operaciones de relacionamiento LÓGICO MATEMÁTICO

¿SABÍAS QUE?

"Las matemáticas puras son, en su forma, la poesía de las ideas lógicas"
Albert Einstein.

Veamos el siguiente material:

Tablas de valor de verdad

Mira el video 1 y 2 de los siguientes enlaces y de acuerdo a lo observado debes llenar las siguientes tablas.

1

2

p	q	p ∨ q

p	q	p ∧ q

Lo que tenemos arriba son tablas de verdad que se aplican para encontrar los resultados de falsedad y/o verdad de proposiciones desde un enfoque lógico matemático, para el manejo adecuado de estas tablas veremos a continuación los resultados base de proposiciones simples y compuestas utilizando los diferentes conectivos de relación.

CONECTIVOS LÓGICO MATEMÁTICOS		
SÍMBOLO	**NOMBRE**	**SIGNIFICADO**
$\wedge$	...y...	Conjunción
$\vee$	...o...	Disyunción
$\rightarrow$	...entonces...	Condicional
$\leftrightarrow$	...si y solo si...	Doble condicional
$\underline{\wedge}$	Para todo...	Cuantificador universal

TABLA DE VERDAD PARA LA CONJUNCIÓN

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

TABLA DE VERDAD PARA LA DISYUNCIÓN

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

TABLA DE VERDAD PARA LA CONDICIONAL

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

TABLA DE VERDAD PARA LA BICONDICIONAL

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ahora, algo que debemos de tener muy en cuenta es el tamaño que debe tener nuestra tabla; eso se halla definido por la siguiente expresión exponencial:

2^n donde n = número de proposiciones

Veamos los siguientes casos:

p (n = 1)	p, q (n = 2)	p, q, r (n = 3)	p, q, r, s (n = 4)	p, q, r, s, t (n =)
$2^1 = 2$	$2^2 = 2*2 = 4$	$2^3 = 2*2*2 = 8$	$2^4 = 2*2*2*2 = 16$	25 =

P
V
F

P	Q
V	V
V	F
F	V
F	F

P	Q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

P	Q	r	s
V	V	V	
V	V	V	
V	V	F	
V	V	F	
V	F	V	
V	F	V	
V	F	F	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	V	
F	V	F	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	V	
F	F	F	
F	F	F	

En el espacio de esta columna realiza la tabla que corresponde a una relación de 5 (cinco) proposiciones.

Exploremos la teoría

1. **Vivo en La Paz.**
2. **Vivo en Cochabamba.**
3. **Vivo en Santa Cruz de la Sierra.**
4. **Soy boliviano.**
5. **Soy paceño.**
6. **Soy kochala.**
7. **Soy cruceño.**
8. **Soy chaqueño.**

Algo que es bueno conocer es que una tabla puede tener las proposiciones simples y tambien pueden contener proposiciones compuestas, veamos las siguientes proposiciones:

Con las proposiciones planteadas vamos a formar diferentes proposiciones compuestas y las vamos a resolver.

1. Vivo en Cochabamba o vivo en Santa Cruz de la Sierra. (Proposición literal)
2. Vivo el Santa Cruz de la Sierra y soy cruceño. (Proposición literal)
3. Si vivo en La Paz y soy paceño entonces soy boliviano. (Proposición literal)

Ahora cada una de las proposiciones literales las escribiremos en lenguaje simbólico de lógica matemática, y seguidamente la resolveremos.

1. Vivo en cochabamba o vivo en Santa Cruz de la Sierra. (Proposición literal)

Decimos:

- Vivo en Cochabamba = p
- Vivo en Santa Cruz de la Sierra = q

Con estos datos la proposición 1 la representamos simbólicamente.

$p \vee q$

REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA DE UNA PROPOSICIÓN COMPUESTA

RESOLVEMOS EN UNA TABLA DE VERDAD

P	Q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	
F	F	

Tabla de disyunción con la ayuda del docente resolvemos en la pizarra y cuadernos.

APRENDIZAJES COMPLEMENTARIOS - MATEMÁTICA

2. Vivo en Santa Cruz de la Sierra y soy cruceño.

Decimos:

- Vivo en Santa Cruz de la Sierra = p
- Soy cruceño = q

Con estos datos la proposición 2 la representamos simbólicamente.

$p \wedge q$

REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA DE UNA PROPOSICIÓN COMPUESTA

RESOLVEMOS EN UNA TABLA DE VERDAD

P	Q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	
F	F	

Tabla de conjunción con la ayuda del docente resolvemos en la pizarra y cuadernos.

3. Si vivo en la paz y soy paceño entonces soy boliviano. (Proposición literal)

Decimos:

- Si vivo en la paz = p
- Soy paceño = q
- Entonces soy boliviano = r

Con estos datos la proposición 3 representamos simbólicamente.

$(p \wedge q) \rightarrow r$

REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA DE UNA PROPOSICIÓN COMPUESTA

RESOLVEMOS EN UNA TABLA DE VERDAD

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow r$
V	V	V	V	V
V	V	F		
V	F	V		
V	F	F		
F	V	V		
F	V	F		
F	F	V		
F	F	F		

Tabla de disyunción con la ayuda del docente resolvemos en la pizarra y cuadernos.

Exploremos la teoría

Con la ayuda de las siguientes tablas resuelve la proposición lógica matemática:

TABLA DE VERDAD PARA LA CONJUNCIÓN

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

TABLA DE VERDAD PARA LA CONDICIONAL

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Proposiciones simples

1. Estudio matemática = p
2. Aprendo lógica matemática = r
3. Realizo razonamiento lógico = s

Proposición compuesta literal:

Si estudio matemática y aprendo lógica matemática entonces realizo razonamiento lógico

Proposición simbólica:

$$p \wedge q \rightarrow r$$

RESOLVEMOS EN UNA TABLA DE VERDAD

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow s$
V				
V				
V				
V				
F				
F				
F				
F				

En este cuadro escribe tu interpretación del resultado que se ha obtenido en la tabla de verdad.

R. ....

....

....

....

....

....

....

APRENDIZAJES COMPLEMENTARIOS - MATEMÁTICA

Exploremos la teoría

Elabora dos proposiciones simples y realiza tres proposiciones compuestas utilizando conectivos diferentes, luego resuelve con las tablas de verdad.

Realiza las tablas de verdad de las proposiciones compuestas que elaboraste.

PROPOSICIONES SIMPLES:

1. ....

....

2. ....

....

PROPOSICIONES SIMPLES:

1. ....

2. ....

3. ....

Con la ayuda de dos de tus compañeros/as de clase compartan sus respectivas proposiciones simples y elaboren seis tablas de verdad con proposiciones compuestas de tres y cuatro proposiciones simples relacionadas con diferentes conectivos lógicos.

Clasificación de fórmulas proposicionales

Para iniciar este tema recordaremos la resolución de proposiciones compuestas logico – matemáticas, a partir de las siguientes propuestas.

1. Trabajo en el día = p
2. Trabajo en la noche = q
3. Estudio en la noche = r

Realizamos las siguientes respuestas con tablas de verdad.

Si trabajo de día y estudio en la noche. $\mathbf{p \wedge q}$

p	q	$p \wedge q$

Estudio en la noche o no estudio en la noche. $\mathbf{r \vee \sim r}$

r	∼r	r ∨ ∼r

Trabajo en el día o trabajo en la noche, y si no trabajo en la noche, entonces trabajo en el día.

p	q	∼q	p ∨ q	∼q → p	(p ∨ q) ∧ (∼q → p)

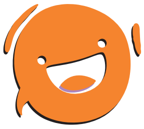
De manera puntual escribe las características que observas en las tablas resueltas, ¿qué diferencias encuentras entre cada una de ellas?

R. ....

....

....

....



Comparte con tus compañeros y compañeras mediante lectura en voz alta.

Exploremos la teoría

- Trabajo en el día y estudio en la noche; y, si trabajo en el día entonces, no trabajo en la noche.

p	q	p ∨ q	∼p	∼p → (∼q)	(p ∧ q) ∧ {p → (∼q)}
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	F
F	V	F	F	V	F
F	F	F	V	V	F

Damos valores a cada proposición simple: p, q.
Hallamos el resultado de la relación **p ∧ q**, además **∼q**.
Encontramos el resultado de la relación **p → (∼q)** guías celeste.
Finalmente hallamos:
(p ∧ q) ∧ {p → (∼q)}
guías naranja.

Como podemos ver el resultado final nos demuestra que esta proposición es totalmente falsa.

- Trabajo en el día o trabajo en la noche, entonces si trabajo en el día o, no trabajo en el día y trabajo en la noche

p	q	p ∨ q	∼p	∼p ∧ q	p ∨ (∼p ∧ q)	(p ∨ q) → {p ∨ (∼p ∧ q)}
V	V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	F	V

Esta proposición nos da como resultado verdadero.

- Trabajo en el día o trabajo en la noche si y solo si estudio en la noche.

p	q	r	p ∨ q	(p ∨ q) ↔ r
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	V

En este caso el resultado obtenido con las tablas nos da entre verdad y falso.

De estas proposiciones resueltas, entonces podemos deducir la siguiente clasificación de proposiciones:

Tautología

p	q	q ∨ p	∼q	∼p ∧ q	p ∨ (∼p ∧ q)	(p ∨ q) → {p ∨ (∼p ∧ q)}
V	V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	F	V

Tautología
Son aquellas proposiciones compuestas de la relación de cualquier conectivo lógico con las proposiciones simples que nos da como resultado final verdaderos.

Contradicción

p	q	$p \wedge q$	$\sim q$	$p \rightarrow (\sim q)$	$(p \wedge q) \wedge \{p \rightarrow (\sim q)\}$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	F
F	V	F	F	V	F
F	F	F	V	V	F

Contradicción
Será aquella proposición compuesta que nos da como resultado final falso.

Contingencia

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \leftrightarrow r$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	V

Contingencia
Son proposiciones compuestas cuyo resultado no es tautología y tampoco es contradicción.

La matemática pura es a su manera, la poesía de las ideas lógicas.
Albert Einstein

Valoremos lo aprendido

Resuelve la siguiente proposición compuesta por tabla de verdad y señala cuál es la importancia de encontrar un determinado resultado.

$$(p \vee q) \rightarrow \sim (p \vee q)$$

R. ....

....

....

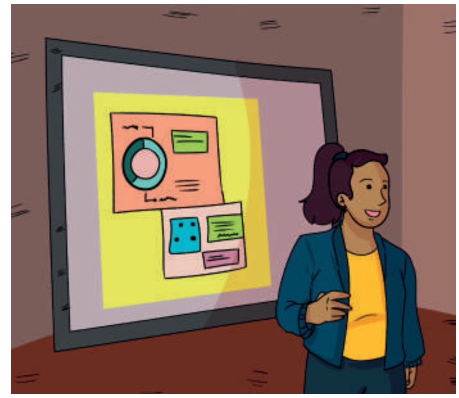
....

....

....

....

Resuelve las siguientes proposiciones y determina la clase de proposiciones que son cada una de llas y explica el porqué.



1. $p \vee (q \wedge r)$
2. $p \rightarrow \sim (q \wedge r)$
3. $\{(p \leftrightarrow q) \wedge q\}$
4. $(\sim p \rightarrow q) \wedge \sim (q \rightarrow \sim p)$
5. $\{(p \vee \sim q) \rightarrow \sim p\} \wedge (\sim p \leftrightarrow q)$

El curso se organiza en equipos de trabajo y cada equipo realizará una tabla de proposiciones compuestas resuelta donde se aplique los diferentes conectivos y además pertenezca a una clase de proposición (tautología, contradicción y contingencia). Para su socializacción lo pueden hacer mediante una presentación con diapositivas o video tutorial.

Equivalencia lógica

Resolvamos las siguientes proposiciones mediate tablas de verdad:

1. $p \rightarrow (q \vee r)$
2. $p \wedge (q \vee r)$
3. $\sim p \rightarrow (\sim p \vee r)$
4. $p \wedge \sim p$
5. $(p \wedge q) \rightarrow p \vee \sim r$

RESOLVEMOS CON EL FACILITADOR

p	$\sim q$	r	$\sim p \vee r$	$\sim q \rightarrow (\sim q \vee r)$
V	F	V	V	V
V		F		
F	V	V		
F		F		

Una vez que hemos resuelto en nuestros cuadernos, verificamos cada uno de los resultados con la ayuda del facilitador/a.

Dialogamos sobre los resultados que tienen las proposiciones que se encuentran a uno y otro lado de los conectivos marcados con rojo y observemos si el resultado del conectivo final b es una: tautología, contradicción o contingencia.

Exploremos la teoría

Si en las tablas anteriores los resultados finales es tautología, entonces podemos determinar que estas proposiciones son equivalentes, veamos el ejercicio por partes:

$$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee \sim r)$$

P	q	p ∧ q	→	p	r	~ r	p ∧ ~ r
V	V	V	V	V	V	F	V
V	V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	V	F	V
V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	F	F
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	F	V	F	V	F	F
F	F	F	V	F	F	V	V

Como la relación final es una **Tautología**, entonces podemos decir que las proposiciones que la conforman son equivalentes.

$$(p \wedge q) \rightarrow p$$

P	q	p ∧ q	→	p
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	F
F	F	F	V	F

Por ser tautología estas proposiciones son equivalentes

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow [(\sim p) \vee q]$$

RESOLVEMOS LA PROPOSICIÓN					
p	q	~ p	p → q	(~ p) ∨ q	(p → q) ↔ [(~ p) ∨ q]
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

RESOLVEMOS LA PROPOSICIÓN		
p → q	↔	(~ p) ∨ q
V	V	V
F	V	F
V	V	V
V	V	V

TAUTOLOGÍA

RESULTADOS IGUALES

Simplificación de fórmulas proposicionales

Para realizar operaciones de simplificación de proposiciones, primero, conoceremos las siguientes fórmulas de equivalencias, para luego aplicarlas en el algebra de proposiciones.

Es necesario aclarar que el símbolo $\leftrightarrow$ si y solo si, quiere decir que es una tautología de proposiciones compuestas con cada uno de sus lados.

($p \wedge q$ <=> $q \wedge p$), esto quiere decir ($p \wedge q$) equivale a ($q \wedge p$)

Veamos la diferencia del significado de los siguientes símbolos que son muy parecidos:

NOMBRE DE RELACIÓN	SÍMBOLO	OBSERVACIÓN
... Si solo si ...	$\leftrightarrow$	**Es una flecha doble de trazo con líneas simple**
... Equivale a ...	$\Leftrightarrow$	**Es una flecha doble pero la línea que une las puntas tiene trazo de doble línea**

El símbolo de equivalencia varia según a los autores y quienes lo utilizan, siendo los siguientes los mayormente utilizados, pero puede haber otros más:

... Equivale a ...	$\Leftrightarrow$	$\cong$	$\equiv$

Ahora observemos la siguiente tabla con sus equivalencias:

Nombre	Forma Simbólica	Forma de Argumento equivalente	
Idempotencia	$p \wedge p \Leftrightarrow p$ $p \vee p \Leftrightarrow p$	$p \wedge p \Leftrightarrow p$ $p \vee p \Leftrightarrow p$	$p \Leftrightarrow p \wedge p$ $p \Leftrightarrow p \vee p$
Doble negación	$\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$	$\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$	$p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$
Conmutativa	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow q \leftrightarrow p$ $p \,\Delta\, q \Leftrightarrow q \,\Delta\, p$	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow q \leftrightarrow p$	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow q \leftrightarrow p$
Asociativa	$(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$	

Con la ayuda del/a facilitador/a y/o por medio de un trabajo de investigación completa el cuadro de las leyes de equivalencia de lógica proposicional.

DISTRIBUTIVA		
De Morgan	$\sim(p \vee q) \quad \sim p \vee \sim q$ $\sim(p \wedge q) \quad \sim p \vee \sim q$	
Del complemento		
Identidad		
Condicional	$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow p \vee q \vee (\sim p \vee \sim q)$ $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \vartriangle q)$	
Bicondicional		
Absorción		

- Si tenemos las siguientes proposiciones simples:
  1. Las clases se suspenden: **p**
  2. El CEA se cierra: **q**
  3. Se inician las vacaciones: **r**

Tenemos la siguiente proposición compuesta:

Es falso que las clases se suspenden o el CEA se cierra, si se inician las vacaciones. Nos han comunicado falsamente que ni las clases se suspende ni el CEA cierra.

Ahora lo expresamos algebraicamente la proposición planteada:

$$[r \rightarrow \sim(p \vee q)] \vee \sim(\sim p \vee \sim q)$$

Utilizando la tabla de equivalencia resolvemos la proposición lógica.

$$\underbrace{[r \rightarrow \sim(p \vee q)]}_{\text{POR LA CONDICIONAL}} \vee \underbrace{\sim(\sim p \vee \sim q)}_{\text{DE MORGAN}}$$

Doble negación en el segundo miembro: **$\sim(\sim p) = p; \sim(\sim q) = q$**

$$[\sim r \vee \sim(p \vee q)] \vee (p \vee q)$$

aplicando ley de absorción

$$(p \vee q) \vee \sim r$$

Interpretamos la respuesta: **las clases se suspenden** o **el CEA se cierra y no se inician las vacaciones, siendo la respuesta: no se inician las vacaciones.**

Encierra con un círculo el índice que corresponde a la respuesta correcta:

a) Se suspenden las clases

b) No se suspenden las clases

c) Se inician las vacaciones

d) No se inician las vacaciones

e) El CEA cierra

- Ahora resuelve la siguiente proposición compuesta.

  Si Juan trabaja, Ana será feliz. El bus llegará al amanecer si no hay lluvia en la ciudad. Pero, si hay lluvia en la ciudad entonces Juan no trabaja. Si sabemos que Juan trabaja, se deduce que:

I. Ana será feliz. **II. El bus llegará al amanecer.** **III. No hay lluvia en la ciudad**

La proposición la descomponemos en proposiciones simples:

1. Juan trabaja: **p**
2. Ana será feliz: **q**
3. Hay lluvia en la ciudad: **r**
4. El bus llegará al amanecer: **s**

Si Juan trabaja **(p)**, Ana será feliz **(q)**. El bus llegará al amanecer **(s)** si no hay lluvia en la ciudad **(~ r)**. Pero, si hay lluvia en la ciudad **(r)** entonces Juan no trabaja **(~ p).** Si sabemos que Juan trabaja **(p)**, se deduce que:

Ahora lo expresamos algebraicamente la proposición planteada:

$$(p \rightarrow q) \vee (\sim r \rightarrow s) \vee (r \rightarrow \sim p) \wedge p$$

Utilizando la tabla de equivalencia simplificamos la proposición lógica.

$$(\sim p \vee q) \wedge (\sim \sim r \vee s) \wedge (\sim r \vee \sim p) \wedge p$$

/aplicando CONDICIONAL

$$(\sim p \vee q) \wedge (r \vee s) \wedge \sim (r \wedge p) \wedge p$$

/simplificando

$$p \wedge s \wedge q$$

Reflexionemos:

Interpretamos la respuesta: **Juan trabaja y el bus llegará al amanecer y Ana será feliz.**

Encierra con un círculo el índice que corresponde a la respuesta correcta:

a) Solo I

b) Solo II

c) III y II

d) I y II

e) I y III

f) Toda

Exploremos la teoría

Como podemos apreciar, en la resolución de inecuaciones de segundo grado se aplican todos nuestros saberes y conocimientos de los temas anteriores, por lo tanto por parejas de participantes de manera dialogada escribir en una plana de una hoja tamaño carta sobre la importancia de saber resolver inecuaciones cuadráticas y cómo esto nos ayuda en nuestro trabajo diario.

Observa los siguientes cuadros y realiza una composición escrita con una extensión de una pagina completa sobre lo que representan las mismas y su utilidad en nuestra vida diaria.

Leamos con atención y respondamos

Negación

A	¬ A
V	F
F	V

Conjunción

A	B	A ∧ B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disyunción

A	B	A ∨ B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Condicionalidad

A	B	A → B
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Bicondicionalidad

A	B	A ↔ B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

TAUTOLOGÍA

$(\sim q \rightarrow \sim p) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

p	q	~ p	~ q	~ p → ~ q	p → q	(~ q → ~p) ↔ (p → q)
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Tautología

CONTRADICCIÓN

$p \vee \sim p$

p	~ p	p v ~ p
V	F	F
F	V	F

Antitautología

CONTINGENCIA

$(r \rightarrow s) \wedge (s \rightarrow r)$

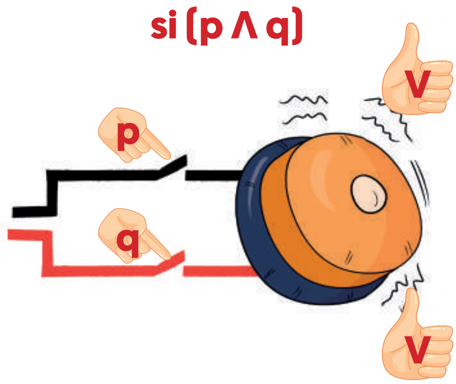
r	s	r → s	s → r	(r → s) ∧ (s → r)
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Contingencia

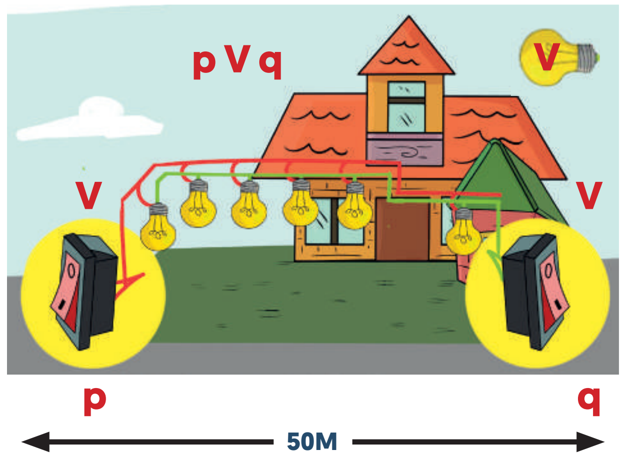
Circuito lógico: en serie y paralelo

¿Recuerdas los videos observados al inicio del tema?

Si tengo una casa con dos timbres para tocar (el punto p, además del punto q, ¿que ocurrirá si le aplicamos la siguiente relación?



CONJUNCIÓN y (∧)



INSTALACIÓN DE FOCOS EN UNA CASA

Pues lo que teníamos en estos videos son experiencias de lo que puede ocurrir con un circuito eléctrico.

Propongamos una pequeña tesis de lo que entendemos por circuitos y lo que tendríamos que conocer de los mismos.

Realizar este trabajo en una media plana de nuestro cuaderno de manera clara y muy consisa.

Exploremos la teoría

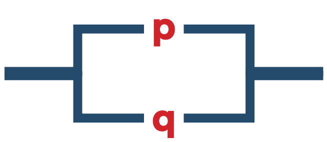
Lo que podemos decir es que los circuitos lógicos se pueden presentar como: circuitos en serie y circuitos en paralelo, en algunos casos la combinación de ambos casos y a esos los llamaremos circuitos mixtos, aunque es necesario recalcar que solo hay circuitos en serie y paralelo.

CIRCUITO EN SERIE

$p \wedge q$

CONJUNCIÓN

CIRCUITO EN PARALELO

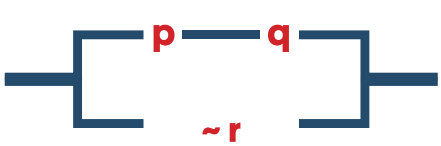


$p \vee q$

DISYUNCIÓN

Los circuitos en serie serán una conjunción y los paralelos serán una disyunción.

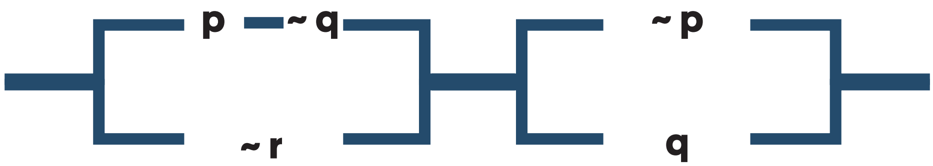
CIRCUITO MIXTO



$(p \wedge q) \vee \sim r$

DISYUNCIÓN

Resolvemos el siguiente circuito



Transformamos el circuito en una proposición

$$[(p \wedge \sim q) \vee \sim r] \wedge (\sim p \vee q)$$

Si consideramos que:

$(p \wedge \sim q) = a$

$\sim r = b$

$(\sim p \vee q) = c$

$(a \vee b) \wedge c$ **/Aplicando Ley Distributiva**

$(a \wedge c) \vee (b \wedge c)$ **/Reemplazando con los valores originales**

$[(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \vee q)] \vee [(\sim r) \wedge (\sim p \vee q)]$ **/Por Distributiva**

$[(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \vee q)] \vee (\sim r \wedge \sim p) \vee (\sim r \wedge q)$

$[(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \vee q)] \vee \sim r \wedge (\sim p \vee q)$

$((p \wedge \sim q) \wedge \sim p) \vee ((p \wedge \sim q) \wedge q) \vee \sim r \wedge (\sim p \vee q)$ **/ Por Asociativa**

$(p \wedge (\sim q \wedge \sim p)) \vee ((p \wedge \sim q) \wedge q)$ **/ De Morgan**

$(p \wedge \sim (q \vee p)) \vee ((p \wedge \sim q) \wedge q)$ **/ Conmutativa**

$(p \wedge \sim (q \vee p)) \vee (p \wedge (\sim q \wedge q))$ **/Distributiva**

$p \wedge [\sim (q \vee p) \vee (\sim q \wedge q)]$ **/Complemento** $(\sim q \wedge q) = F$

$p \wedge [\sim (q \vee p) \vee F]$ **/Identidad** $p \vee F \equiv p$

$p \wedge \sim p$ **/Complemento** $p \wedge \sim p \equiv F$

POR LO TANTO, EL RESULTADO DE NUESTRO CIRCUITO ES FALSO.

Observa atentamente los siguientes cuadros y recuerda todo lo realizado hasta el momento.

Ley	Nombre
$\neg(\neg p) = p$	**Doble Negación**
$p \vee q = q \vee p$ $p \wedge q = q \wedge p$	**Conmutativa**
$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$ $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$	**Asociativa**
$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	**Distributiva**

Ley	Nombre
$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$	**Ley de Morgan**
$p \rightarrow q = \neg p \vee q$	**Definición de la implicación**
$p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	**Definición de la coimplicación**

Con tu compañero de asiento reflexiona sobre la importancia de realizar este tipo de ejercicios y de como nos ayudaría a resolver nuestros problemas diarios.

Las conclusiones del diálogo anótalo en tu cuaderno y socializalo en el curso.

....

....

....

Apliquemos lo aprendido

- Realiza los ejercicios y actividades que te proponga el facilitador/a.
- Para recordar y tenerlo presente en todo momento elabora un cuadro con todas las formulas y leyes de la lógica matemática, preséntalo a tu facilitador/a para que le dé su visto bueno.
- Realiza un ejercicio modelo para resolver en la pizarra del curso.

Bibliografía

Allen R. Angel. (2018) “Álgebra intermedia” , Ed. PEARSOM, México.

Bautista, R. y Martínez, R. (2004). “Las matemáticas y su entorno. México D. F., México: UNAM, Siglo XXI Editores.

Espinoza, A. (1999). “Taller de matemática básica 10”. Quito, Ecuador: Editorial Graf Color.

Lazo Sebastian. (2010) “Algebra Moderna”,Ed. SOIPALTDA, La Paz – Bolivia.

Schaum-, Murray R. Spigel-Robert E. Moyer. (2007) “Álgebra Superior”, Ed. McGRAW-HILL, México DF.

Frnak Ayres. (1990) “Trigonometría plana y esférica”, McGRAW-HILL, Bogotá – Colombia.

Kindle Joseph H. “Geometría Analítica” Ed. McGRAW-HILL, Mexico D.F.

M. Pulina Flotts (2016) Aportes para la enseñanza de la Matemática, Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. s/d. Santiago de Chile.

Oliveros, E. (2003). “Textos de geometría básica”. Tomo I. Quito, Ecuador: Grupo Editorial AGFEM.

Paulín, J. (1993). “Álgebra, la matemática como una forma de pensar”. México D. F., México: McGraw Hill.

Villon Bejar Máximo (2005) ÁLGEBRA Tomo 1 y ALGEBRA Tomo 2, , Ed. Villon Bejar, Perú.

ESTADO PLURINACIONAL DE
BOLIVIA

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

VICEMINISTERIO DE
EDUCACIÓN ALTERNATIVA Y
ESPECIAL

minedu.gob.bo   @minedubol   minedu_bol

Av. Arce No. 2147 - Teléfonos: (591 -2) 2442144 - 2681200
La Paz - Bolivia